Representación de números complejos

Unidad 10. Números complejos.

Prof. Ender Araujo

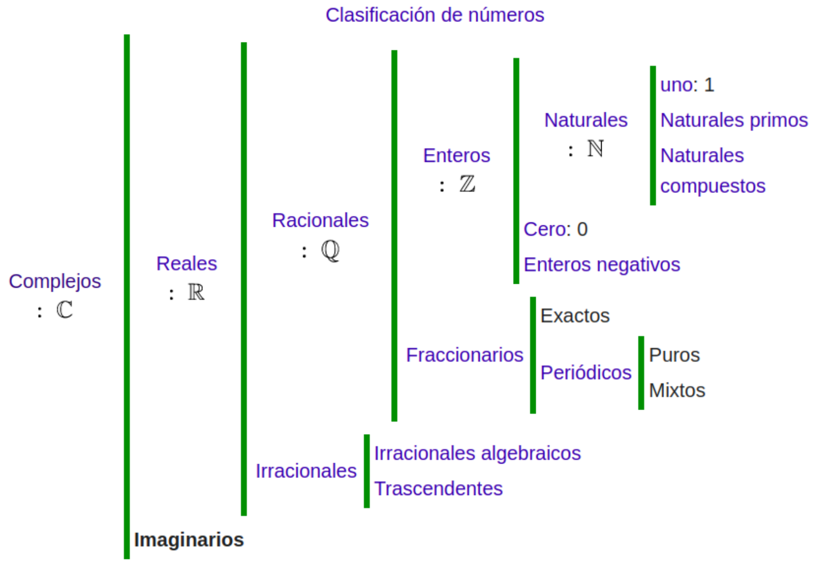
Departamento de Matemática. Liceo Científico.
Villa Tapia 3400. Provincia Hnas Mirabal. República Dominicana.

02 de noviembre de 2020

» Índice de contenido

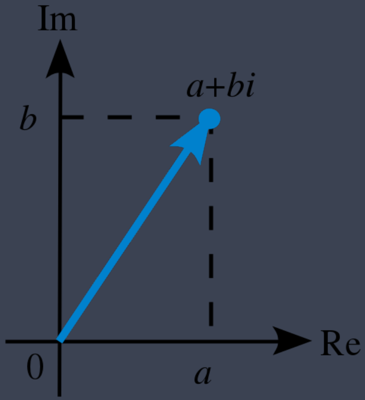
» $\mathbb{C}$ como extensión de $\mathbb{R}$

1. Son una extensión de los reales. $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$.
2. A diferencia de $\mathbb{R}$ incluye todas las soluciones de las raíces de los polinomios.
3. **Todo número complejo** puede representarse como la **suma** de un número **real** y un número **imaginario**.


Clasificación de números
Complejos : $\mathbb{C}$
Reales : $\mathbb{R}$
Racionales : $\mathbb{Q}$
Enteros : $\mathbb{Z}$
Naturales : $\mathbb{N}$
uno: 1
Naturales primos
Naturales compuestos
Cero: 0
Enteros negativos
Fraccionarios
Exactos
Periódicos
Puros
Mixtos
Irracionales
Irracionales algebraicos
Trascendentes
Imaginarios

» Diagrama de Argand

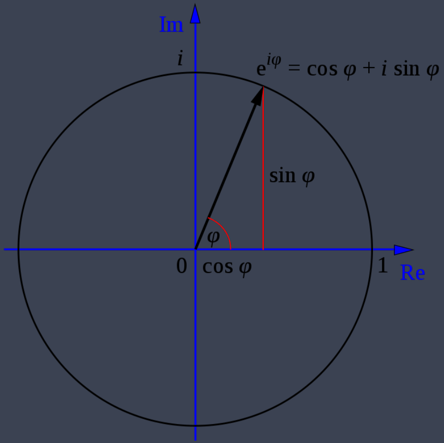
Interpretación geométrica de los números complejos.



Representación geométrica de un número complejo z, como suma de un número real y un número imaginario.

» Diagrama de Euler

Interpretación geométrica de los números complejos.



Fórmula de Euler representada en el plano complejo.

» Álgebra de números imaginarios

Un número imaginario, es un número complejo cuya **parte real** es cero.

Consideraciones:

1. i es la **unidad imaginaria.**

$$i \equiv \sqrt{-1}. \tag{1}$$

2. Todo número imaginario es de la forma: $z = yi \quad \forall \quad y \in \mathbb{R}$.

Cálculo del módulo.

1. $i^0 = 1$.
2. $i^1 = i \equiv \sqrt{-1}$.
3. $i^2 = i \cdot i = (\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) = -1$.
4. $i^3 = (i^2) i = (-1) i = -i$.
5. $i^4 = (i^2)(i^2) = (-1)(-1) = 1 = i^0$.

$\vdots$
$i^{-3} = i$
$i^{-2} = -1$
$i^{-1} = -i$
$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$
$\vdots$
$i^n = i^{n \bmod 4}$ (**mod** representa el residuo)
$\vdots$

» Propiedades de potencia.

En la expresión a^n, a es la **base** y n es la **potencia.**
Considerando que n pertenece a los naturales. $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{a^{m \cdot n} = (a^m)^n. \text{ Potencia de una potencia.}}$$

¿Cómo podemos representar el cálculo de i^{20}?

$$i^{20} = i^{4 \cdot 5} = (i^4)^5.$$

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \text{ Multiplicación de potencias.}}$$

¿Cómo podemos representar el cálculo de i^{22}?

$$i^{22} = i^{20} \cdot i^2 = i^{20+2}.$$

» Cálculo del módulo para potencias i^n

Cálculo de i^{20}.

1er Paso. Cálcular el módulo (mod) de n si $n \geq 4$.

$n = 20$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 4 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

$$\boxed{20 = 4 \times 5 + 0.\ \text{Módulo } 0 \rightarrow \text{mod } = 0.}$$

$$\boxed{20 \bmod 4 = 0}$$

$\vdots$
$i^{-3} = i$
$i^{-2} = -1$
$i^{-1} = -i$
$i^{0} = 1$
$i^{1} = i$
$i^{2} = -1$
$i^{3} = -i$
$i^{4} = 1$
$i^{5} = i$
$i^{6} = -1$
$\vdots$
$i^{n} = i^{n \bmod 4}$ (**mod** representa el residuo)
$\vdots$

» Cálculo del módulo para potencias i^n

Cálculo de i^{20}.

2do Paso. Utilizar las propiedades de potencias.

$$i^{20} = i^{4\cdot 5} = (i^4)^5 = (1)^5 = \underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{\text{5-veces}} = 1.$$

$$\boxed{i^{20} = i^{4\cdot 5} = (i^4)^5 \cdot \underbrace{i^0}_{1} = (1)^5 = \underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{\text{5-veces}} = 1. \to \text{mod} = 0.}$$

$$\boxed{i^{20} = 1. \to \text{mod} = 0.}$$

$\vdots$
$i^{-3} = i$
$i^{-2} = -1$
$i^{-1} = -i$
$i^{0} = 1$
$i^{1} = i$
$i^{2} = -1$
$i^{3} = -i$
$i^{4} = 1$
$i^{5} = i$
$i^{6} = -1$
$\vdots$
$i^{n} = i^{n \bmod 4}$ (**mod** representa el residuo)
$\vdots$

Cálculo del módulo para potencias i^n

⚠ !Importante¡

$$\boxed{i^n \xrightarrow{\text{mod} = 0} 1}$$

¿Qué quiere decir esto?

$$i^{4\cdot 1} = i^4 = 1$$

$$i^{4\cdot 2} = i^8 = (\underbrace{i^4}_{1})^2 = 1\cdot 1 = 1.$$

$$i^{4\cdot 3} = i^{12} = (\underbrace{i^4}_{1})^3 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

$$\vdots$$

$$i^{4\cdot n} = i^{4\cdot n} = (\underbrace{i^4}_{1})^n = \underbrace{1\cdots 1}_{\text{n-veces}} = 1.$$

$\vdots$
$i^{-3} = i$
$i^{-2} = -1$
$i^{-1} = -i$
$i^{0} = 1$
$i^{1} = i$
$i^{2} = -1$
$i^{3} = -i$
$i^{4} = 1$
$i^{5} = i$
$i^{6} = -1$
$\vdots$
$i^{n} = i^{n \bmod 4}$ (**mod** representa el residuo)
$\vdots$

» Cálculo del módulo para potencias i^n

Cálculo de i^{21}.

1er Paso. Cálcular el módulo (mod) de n si $n \geq 4$.
$n = 21$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \hline 1 & 5 \end{array}$$

$\boxed{21 = 4 \times 5 + 1.\ \text{Módulo } 1 \to \text{mod } = 1.}$

$\boxed{21 \bmod 4 = 1}$

$\vdots$
$i^{-3} = i$
$i^{-2} = -1$
$i^{-1} = -i$
$i^{0} = 1$
$i^{1} = i$
$i^{2} = -1$
$i^{3} = -i$
$i^{4} = 1$
$i^{5} = i$
$i^{6} = -1$
$\vdots$
$i^{n} = i^{n \bmod 4}$ (**mod** representa el residuo)
$\vdots$

» Cálculo del módulo para potencias i^n

Cálculo de i^{21}.

2do Paso. Utilizar las propiedades de potencias.

$$i^{21} = i^{20} \cdot i = (i^4)^5 \cdot i = (1)^5 \cdot i = \underbrace{(1 \cdot 1 \cdots 1)}_{\text{5-veces}} \cdot i = 1 \cdot i = i. \rightarrow \text{ mod} = 1.$$

$$\boxed{i^{21} = i. \rightarrow \text{ mod} = 1.}$$

$\vdots$	
i^{-3}	$= i$
i^{-2}	$= -1$
i^{-1}	$= -i$
i^{0}	$= 1$
i^{1}	$= i$
i^{2}	$= -1$
i^{3}	$= -i$
i^{4}	$= 1$
i^{5}	$= i$
i^{6}	$= -1$
$\vdots$	
i^{n}	$= i^{n \bmod 4}$ (**mod** representa el residuo)
$\vdots$	

» Cálculo mental de potencias del tipo i^n.

⚠¡Ejercicio de cálculo mental!

¿Cuál es el resultado de $3i^{444}$?

$$\boxed{3i^{444} = 3 \cdot (1) = 3}$$

¿Cuál es el resultado de $i^2 \cdot i^{10} - 1$?

$$\boxed{i^2 \cdot i^{10} - 1 = i^{12} - 1 = 0}$$

¿Cuál es el resultado de $i^{401} \cdot \sqrt{i}$?

$$\boxed{i^{401} \cdot i^{1/2} = i \cdot i^{1/2} = i^{2/2+1/2} = i^{3/2}}$$

» Par ordenado y forma binómica.

⚠ Dos formas muy simples de representar números complejos.

Representación binómica.

$$z = \overbrace{\underbrace{a}_{\text{real}} + \underbrace{b \cdot i}_{\text{img}}}^{\text{núm. complejo}}$$

Par ordenado.

$$z = \overbrace{(\underbrace{a}_{\text{real}}, \underbrace{b}_{\text{img}})}^{\text{núm. complejo}}$$

» Par ordenado y forma binómica.

⚠ Dos formas muy simples de representar números complejos.

Par ordenado	Binómica
$z=(a,b)$	$z=a+b\cdot i$
(3, 2)	3 + 2i
(0, 1)	i
($\sqrt{2}$, 0)	$\sqrt{2}$
(-π, -$\sqrt{3}$)	-$\pi-\sqrt{3}i$

Equivalencias en la representación de números complejos en la representación binómica y de par ordenado.

Práctica 001. MT060

Quizizz

» Consideraciones

1. Es fundamental y básico comprender las propiedades de potencia.
2. Entender el álgebra del módulo.
3. Es muy común cambiar de representación.
4. La aplicación en Ciencia e Ingenieria de números complejos, es central.

Próxima clase

Representación gráfica y operaciones racionales.