LICEO CIENTÍFICO
Dr. Miguel Canela Lázaro

Introducción al Análisis Combinatorio

Departamento de Matemática

Prof. Ender Araujo
Prof. Kelvin Cuevas

Estrategía didáctica

Información

1. Ejemplos y ejercicios.

2. Propiedades.

Medición

1. Participación.

2. Tarea.

Ejemplo 1 Seleccionar pares de números al azar

Ocho pequeños trozos de papel se numeran del 1 al 8 y se ponen en una caja; uno de ellos se saca de la caja, se toma nota del mismo y se *reemplaza en la caja*. Entonces, se saca un segundo trozo de la caja y su número se anota. Por último, los dos números se suman. ¿De cuántas formas diferentes se puede tener una suma igual a 12?

Solución

Para resolver este problema, cuente las formas diferentes en que se puede obtener una suma de 12 usando dos números del 1 al 8.

Primer número	4	5	6	7	8
Segundo número	8	7	6	5	4

De esta lista, se puede ver que una suma de 12 puede presentarse en cinco formas.

Ejemplo 2 Seleccionar pares de números al azar

Ocho trozos de papel se numeran del 1 al 8 y se colocan en una caja. Dos de ellos se sacan de la caja *al mismo tiempo* y los números que tienen marcados se anotan y se suman. ¿De cuántas formas diferentes puede obtenerse una suma igual a 12?

Solución

Para resolver este problema, cuente las formas diferentes en que se puede obtener una suma de 12 *usando dos números diferentes* del 1 al 8.

Primer número	4	5	7	8
Segundo número	8	7	5	4

Por tanto, una suma de 12 se puede obtener en cuatro formas.

Principio fundamental de conteo

Sean E_1 y E_2 dos eventos. El primero E_1 puede presentarse en m_1 formas. Después que E_1 ha ocurrido, E_2 puede ocurrir en m_2 formas. El número de formas en que los dos eventos pueden ocurrir es $m_1 \cdot m_2$.

Ejemplo 3 Usar el principio fundamental de conteo

¿Cuántos pares diferentes de letras del alfabeto inglés son posibles?

Solución

Hay dos eventos en esta situación. El primero de ellos es la opción de la primera letra, y el segundo evento es la opción de la segunda letra. Como el alfabeto inglés contiene 26 letras, se deduce que el número de pares de dos letras es

$$26 \cdot 26 = 676.$$

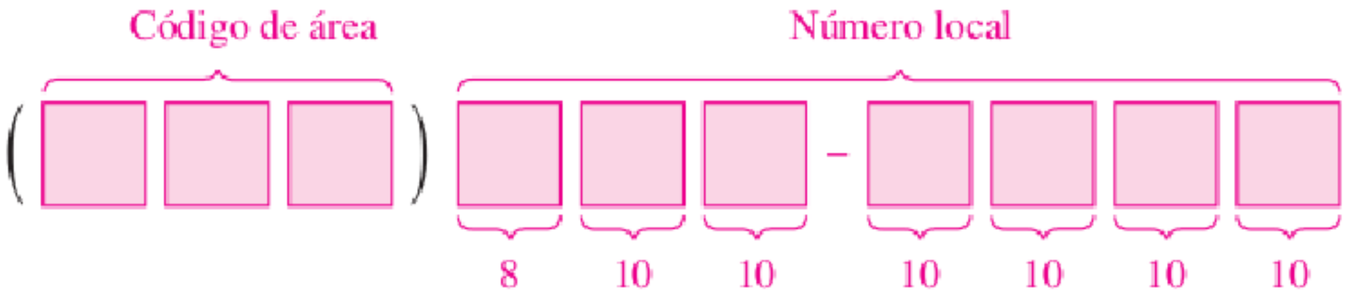
www.elsolucionario.net

Ejemplo 4 Usar el principio fundamental de conteo

Los números telefónicos en Estados Unidos actualmente tienen 10 dígitos. Los primeros tres son la *clave de área* (LADA) y los 7 siguientes son el *número telefónico local*. ¿Cuántos números telefónicos diferentes son posibles dentro de cada clave de área? (Observe que en la actualidad, un número telefónico local no puede iniciarse con 0 ni 1.)

Solución

Como el primer dígito de un número telefónico local no puede ser 0 ni 1, hay sólo ocho opciones para el primer dígito. Para cada uno de los otros seis dígitos, hay 10 opciones.



Por tanto, el número de números telefónicos locales que son posibles dentro de cada código de área es

$$8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 8\,000\,000.$$

Ejemplo 5 Hallar el número de permutaciones de n elementos

¿Cuántas permutaciones son posibles para las letras A, B, C, D, E y F?

Solución

Considere el siguiente razonamiento.

Primera posición: cualquiera de las *seis letras* $m_1 = 6$

Segunda posición: cualquier de las restantes *cinco* letras $m_2 = 5$

Tercera posición: cualquiera de las restantes *cuatro* letras $m_3 = 4$

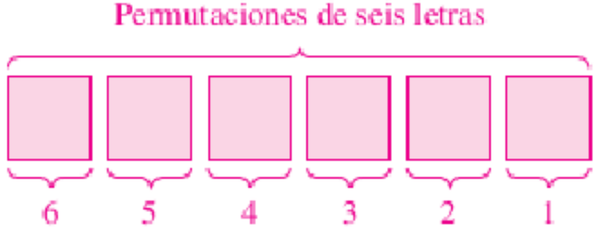
Cuarta posición: cualquiera de las restantes *tres* letras $m_4 = 3$

Quinta posición: cualquiera de las restantes *dos* letras $m_5 = 2$

Sexta posición: la *única* letra restante $m_6 = 1$

solucionario.net

Entonces, el números de opciones para las seis posiciones son como sigue.



El número total de permutaciones de las seis letras es

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 720.$$

Número de permutaciones de n elementos

El número de permutaciones de n elementos es

$$n \cdot (n-1) \cdot \cdot \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

En otras palabras, hay $n!$ formas en que n elementos pueden ordenarse.

Ejemplo 6 Contar finales de carreras de caballos

Ocho caballos están corriendo en una carrera. ¿De cuántas formas pueden estos caballos llegar primero, segundo y tercero? (Suponga que no hay empates.)

Solución

He aquí las diferentes posibilidades.

Ganador (primera posición): *ocho* opciones

Lugar (segunda posición): *siete* opciones

Exhibición (tercera posición): *seis* opciones

Usando el principio fundamental de conteo, multiplique entre sí estos tres números para obtener lo siguiente.

$$\overbrace{\underbrace{\square}_{8}\ \underbrace{\square}_{7}\ \underbrace{\square}_{6}}^{\text{Órdenes diferentes de caballos}}$$

Entonces, hay $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas diferentes.

$\{A, B, C\}$

$n = 3$

$n! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

ABC BCA

ACB CAB

BAC CBA

Permutaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez

El número de permutaciones de n elementos tomados r a la vez es

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= \frac{n!}{(n-r)!} \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).
\end{aligned}
$$

Permutaciones diferentes

Suponga que un conjunto de n objetos tiene n_1 de una clase de objeto, n_2 de una segunda clase, n_3 de una tercera clase, y así sucesivamente, con

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k.$$

Entonces el número de **permutaciones diferentes** de los n objetos es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Ejemplo 7 Permutaciones diferentes

¿En cuántas formas diferentes se pueden escribir las letras BANANA?

Solución

elsolucionario.net

Esta palabra tiene seis letras, de las cuales tres son A, dos son N y una es B. Por tanto, el número de formas diferentes en que las letras se pueden escribir es

$$\begin{aligned}\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} &= \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} \\ &= 60.\end{aligned}$$

Las 60 permutaciones diferentes son como sigue.

AAABNN	AAANBN	AAANNB	AABANN	AABNAN	AABNNA
AANABN	AANANB	AANBAN	AANBNA	AANNAB	AANNBA
ABAANN	ABANAN	ABANNA	ABNAAN	ABNANA	ABNNAA
ANAABN	ANAANB	ANABAN	ANABNA	ANANAB	ANANBA
ANBAAN	ANBANA	ANBNAA	ANNAAB	ANNABA	ANNBAA
BAAANN	BAANAN	BAANNA	BANAAN	BANANA	BANNAA
BNAAAN	BNAANA	BNANAA	BNNAAA	NAAABN	NAAANB
NAABAN	NAABNA	NAANAB	NAANBA	NABAAN	NABANA
NABNAA	NANAAB	NANABA	NANBAA	NBAAAN	NBAANA
NBANAA	NBNAAA	NNAAAB	NNAABA	NNABAA	NNBAAA

Ejemplo 8 Combinaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez

¿De cuántas formas se pueden escoger tres letras del conjunto A, B, C, D y E? (El orden de las tres letras no es importante.)

Solución

Los siguientes subconjuntos representan las diferentes combinaciones de tres letras que se pueden escoger de las cinco letras.

{A, B, C}	{A, B, D}
{A, B, E}	{A, C, D}
{A, C, E}	{A, D, E}
{B, C, D}	{B, C, E}
{B, D, E}	{C, D, E}

www.elsolucionario.net

De esta lista, se puede concluir que hay 10 formas en que tres letras se pueden escoger de entre cinco letras.

Combinaciones de n elementos tomados r a la vez

El número de combinaciones de n elementos tomados r a la vez es

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

que es equivalente a $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$.

Ejemplo 9 Conteo de "manos" de naipes

Una "mano" normal de póquer está formada por cinco cartas repartidas de un mazo de 52 (vea Figura 9.7). ¿Cuántas "manos" de póquer son posibles? (Después de repartir los naipes, el jugador puede reordenarlos, por lo cual el orden no es importante.)

Solución

Se puede hallar el número de manos de póquer si se usa la fórmula para el número de combinaciones de 52 elementos tomados cinco a la vez, como sigue.

$$
\begin{aligned}
{}_{52}C_5 &= \frac{52!}{(52-5)!5!} \\
&= \frac{52!}{47!5!} \\
&= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \cancel{47!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{47!}} \\
&= 2\,598\,960
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10 Formación de un equipo

Usted está formando un equipo de natación de 12 miembros de 10 muchachas y 15 muchachos. El equipo debe estar formado por cinco muchachas y siete muchachos. ¿Cuántos equipos de 12 miembros son posibles?

elsolucionario.net

Solución

Hay ${}_{10}C_5$ formas de escoger cinco muchachas. Hay ${}_{15}C_7$ formas de escoger siete muchachos. Por el principio fundamental de conteo, hay ${}_{10}C_5 \cdot {}_{15}C_7$ formas de escoger cinco muchachas y siete muchachos.

$$
\begin{aligned}
{}_{10}C_5 \cdot {}_{15}C_7 &= \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{15!}{8! \cdot 7!} \\
&= 252 \cdot 6435 \\
&= 1\ 621\ 620
\end{aligned}
$$

Por tanto, hay 1 621 620 posibles equipos de natación de 12 miembros.

Cuando resuelva problemas en los que intervengan principios de conteo, necesita tener aptitud de distinguir entre los diversos principios que hemos visto para determinar cuál necesita para obtener el resultado correcto. Para hacer esto, hágase las siguientes preguntas.

1. ¿Es importante el orden de los elementos? *Permutación*
2. ¿Los elementos escogidos son un subconjunto de un conjunto más grande en el que no sea importante el orden? *Combinación*
3. ¿El problema implica dos o más eventos separados? *Principio fundamental de conteo.*

Tarea semana 16 (MT060-TS16)

18 puntos

HABILIDADES Y APLICACIONES

SELECCIÓN AL AZAR En los Ejercicios 7-14, determine el número de formas en que una computadora puede generar al azar uno o más de enteros del 1 al 12.

7. Un entero impar

8. Un entero par

9. Un entero primo

10. Un entero mayor a 9

8x1

11. Un entero divisible entre 4

12. Un entero divisible entre 3

13. Dos enteros *distintos* cuya suma es 9

14. Dos enteros *distintos* cuya suma es 8

23. NÚMEROS DE TRES DÍGITOS ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse bajo cada una de las condiciones siguientes?

(a) El dígito inicial no puede ser cero.

(b) El dígito inicial no puede ser cero y no se permite repetición de dígitos.

(c) El dígito inicial no puede ser cero y el número debe ser un múltiplo de 5.

2

(d) El número es al menos 400.

27. ASIENTOS PARA CONCIERTO Cuatro parejas han reservado asientos en una fila para un concierto. ¿En cuántas formas pueden tomar asiento si

(a) no hay restricciones para hacerlo? 2

(b) los dos de cada pareja desean sentarse juntos?

65. OPCIONES DE LOTERÍA En el juego de Massachusetts Mass Cash, un jugador escoge cinco números del 1 al 35. ¿En cuántas formas puede seleccionar los cinco números un jugador? 2

67. UNIDADES DEFECTUOSAS Un envío de 25 televisores contiene tres unidades defectuosas. ¿En cuántas formas puede una compañía vendedora comprar cuatro de estas unidades y recibir (a) todas las unidades en buen estado, (b) dos unidades buenas y (c) al menos dos unidades buenas? 2

69. MANO DE POQUER Usted reparte cinco naipes de un mazo ordinario de 52 naipes o cartas de juego. ¿En cuántas formas puede usted obtener (a) un full y (b) una combinación de cinco cartas que contiene dos sotas y tres ases? (Un full consta de tres cartas de una clase y dos de otra. Por ejemplo, A-A-A-5-5 y K-K-K-10-10 son full.) 2

Bono especial ("Somos los amantes de la Ciencia")

Describa un método de crear un número aleatorio en 001 y 100:

1. Hoja de cálculo. (1 punto)

2. Google Colab - Jupyter Notebook (2 puntos)

3. Algoritmo de Numerical Recipes en Fortran 90 (6 puntos)

4. Método para determinar la "calidad" de un número aleatorio (código y gráfico) 10 puntos.

19 puntos

18 puntos

Tabla de entrega	
Semanas de retraso	**Resta de porcentaje a la nota final**
1	15%
2	30%
3	45%
4	No se acepta

Recuerde:
Consultar a los profesores.