LICEO CIENTÍFICO
Dr. Miguel Canela Lázaro

Teorema del binomio

Departamento de Matemática

Prof. Ender Araujo
Prof. Kelvin Cuevas

Estrategía didáctica

Información

1. Ejemplos y ejercicios.

2. Propiedades.

Medición

1. Participación.

2. Tarea.

Coeficientes binomiales

Recuerde que un *binomio* es un polinomio que tiene dos términos. En esta sección estudiaremos una fórmula que da un método rápido de elevar un binomio a una potencia. Para empezar, vea la expansión de $(x + y)^n$ para varios valores de n.

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$\boxed{(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

$$(x + y)^2 \neq x^2 + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Hay varias observaciones que se pueden hacer acerca de estas expansiones.

1. En cada expansión hay $n + 1$ términos

2. En cada expansión, x y y desempeñan funciones simétricas. Las potencias de x disminuyen en 1 en términos sucesivos, mientras que las potencias de y aumentan en 1.

3. La suma de las potencias de cada término es n. Por ejemplo, en la expansión de $(x + y)^5$, la suma de las potencias de cada término es.

.elsolucionario.net

$$(x + y)^5 = x^5 + \overbrace{5x^4y^1}^{4+1=5} + \overbrace{10x^3y^2}^{3+2=5} + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + y^5$$

4. Los coeficientes aumentan y luego disminuyen en forma simétrica.

Los coeficientes de una expansión binomial se denominan **coeficientes binomiales.** Para hallarlos se puede usar el **teorema del binomio.**

El teorema del binomio

En la expansión de $(x + y)^n$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \cdots + {}_nC_r\, x^{n-r}y^r + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

el coeficiente de $x^{n-r}\, y^r$ es

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

El símbolo $\binom{n}{r}$ se usa con frecuencia en lugar de ${}_nC_r$ para denotar coeficientes binomiales.

$$(x + y)^0 = 1$$
$$(x + y)^1 = x + y$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Ejemplo 1 Hallar coeficientes binomiales

Encuentre cada uno de los coeficientes binomiales siguientes.

a. ${}_8C_2$ **b.** $\binom{10}{3}$ **c.** ${}_7C_0$ **d.** $\binom{8}{8}$

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.}$$

Solución

a. $${}_8C_2 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{(8 \cdot 7) \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

b. $$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{(10 \cdot 9 \cdot 8) \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

c. $${}_7C_0 = \frac{\cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 0!} = 1$$

d. $$\binom{8}{8} = \frac{\cancel{8!}}{0! \cdot \cancel{8!}} = 1$$

Ejemplo 2 Hallar coeficientes binomiales

Encuentre cada uno de los coeficientes binomiales siguientes.

a. ${}_7C_3$ **b.** $\binom{7}{4}$ **c.** ${}_{12}C_1$ **d.** $\binom{12}{11}$

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.}$$

Solución

a. ${}_7C_3 = \dfrac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 35$

b. $\dbinom{7}{4} = \dfrac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 35$

c. ${}_{12}C_1 = \dfrac{12}{1} = 12$

d. $\dbinom{12}{11} = \dfrac{12!}{1! \cdot 11!} = \dfrac{(12) \cdot \cancel{11!}}{1! \cdot \cancel{11!}} = \dfrac{12}{1} = 12$

Triángulo de Pascal

Hay una forma práctica de recordar el patrón para coeficientes binomiales. Si escribimos los coeficientes en una forma triangular, obtenemos el siguiente conjunto que se denomina **triángulo de Pascal**. Este triángulo recibe ese nombre en honor al matemático francés Blaise Pascal (1623-1662).

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

$4 + 6 = 10$

$15 + 6 = 21$

$$(x + y)^0 = 1$$ 0-avo renglón

$$(x + y)^1 = 1x + 1y$$ 1er renglón

$$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$ 2º renglón

$$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$ 3er renglón

$$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$ ⋮

$$(x + y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$$

$$(x + y)^6 = 1x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + 1y^6$$

$$(x + y)^7 = 1x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + 1y^7$$

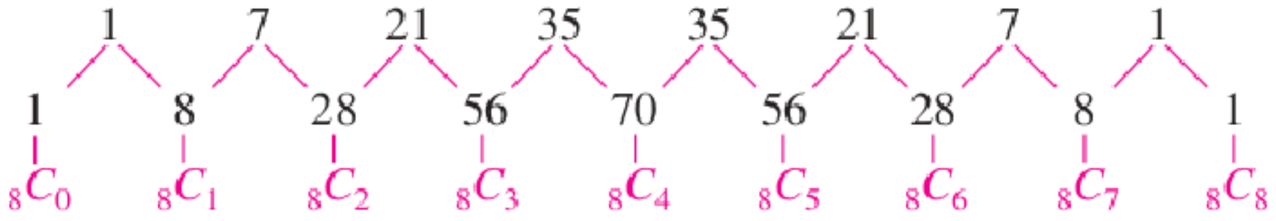
elsolucionario.net

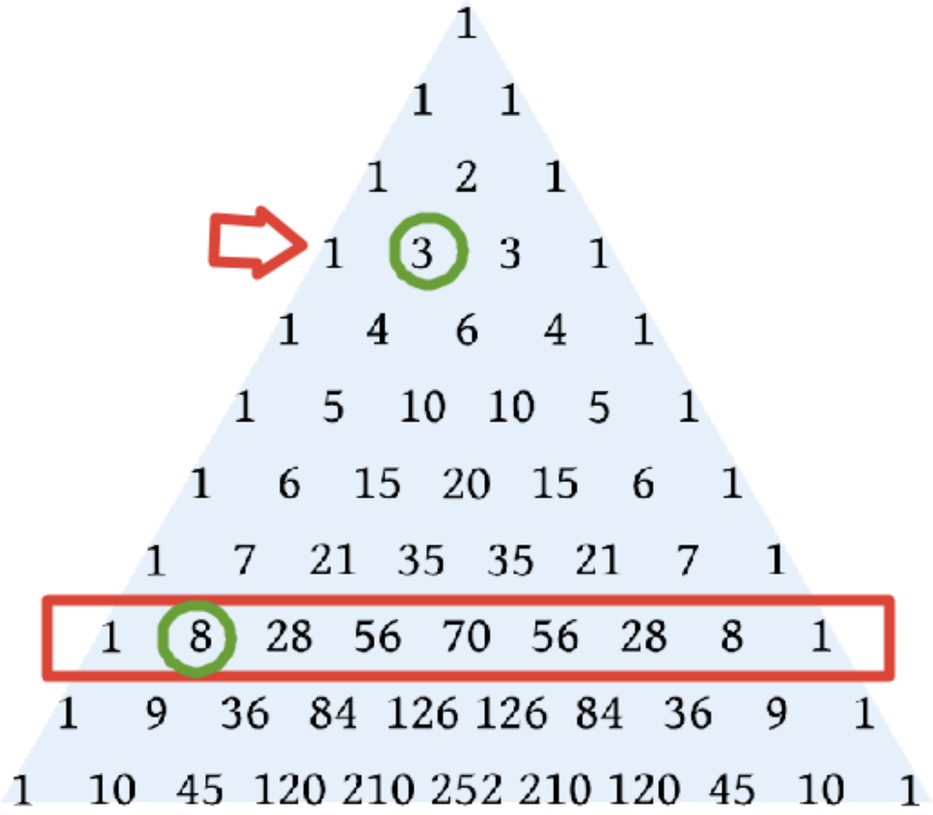
Ejemplo 3 Usar triángulo de Pascal

Use el séptimo renglón del triángulo de Pascal para hallar los coeficientes binomiales.

$${}_8C_0,\ {}_8C_1,\ {}_8C_2,\ {}_8C_3,\ {}_8C_4,\ {}_8C_5,\ {}_8C_6,\ {}_8C_7,\ {}_8C_8$$

Solución





Ejemplo 4 Expandir un binomio

Escriba la expansión de la expresión

$$(x + 1)^3.$$

Solución

Los coeficientes binomiales del tercer renglón del triángulo de Pascal son

$$1, 3, 3, 1.$$

Entonces, la expansión es como sigue.

$$(x + 1)^3 = (1)x^3 + (3)x^2(1) + (3)x(1^2) + (1)(1^3)$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Para expandir binomios que representen *diferencias* más que sumas, se alternan signos. A continuación veamos dos ejemplos.

$$\boxed{\begin{aligned}(x-1)^3 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1\\ (x-1)^4 &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1\end{aligned}}$$

www.elsolucionario.net

Ejemplo 5 Expandir un binomio

Escriba la expansión de cada una de las expresiones siguientes.

a. $(2x - 3)^4$

b. $(x - 2y)^4$

Solución

Los coeficientes binomiales del cuarto renglón del triángulo de Pascal son

$$1, 4, 6, 4, 1.$$

Por tanto, las expansiones son como sigue.

a. $(2x-3)^4 = (1)(2x)^4 - (4)(2x)^3(3) + (6)(2x)^2(3^2) - (4)(2x)(3^3) + (1)(3^4)$

$= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$

b. $(x-2y)^4 = (1)x^4 - (4)x^3(2y) + (6)x^2(2y)^2 - (4)x(2y)^3 + (1)(2y)^4$

$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Ejemplo 6 Expandir un binomio

Escriba la expansión de $(x^2 + 4)^3$.

Solución

Use el tercer renglón del triángulo de Pascal, como sigue.

$$(x^2 + 4)^3 = (1)(x^2)^3 + (3)(x^2)^2(4) + (3)x^2(4^2) + (1)(4^3)$$
$$= x^6 + 12x^4 + 48x^2 + 64$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

A veces será necesario hallar un término específico en una expansión binomial. En lugar de escribir toda la expansión se puede usar el hecho de que, del teorema del binomio, el $(r + 1)$-ésimo término es ${}_nC_r x^{n-r} y^r$.

Ejemplo 7 Hallar un término en una expansión binomial

a. Encuentre el sexto término de $(a + 2b)^8$.

b. Encuentre el coeficiente del término a^6b^5 en la expansión de $(3a - 2b)^{11}$.

Solución

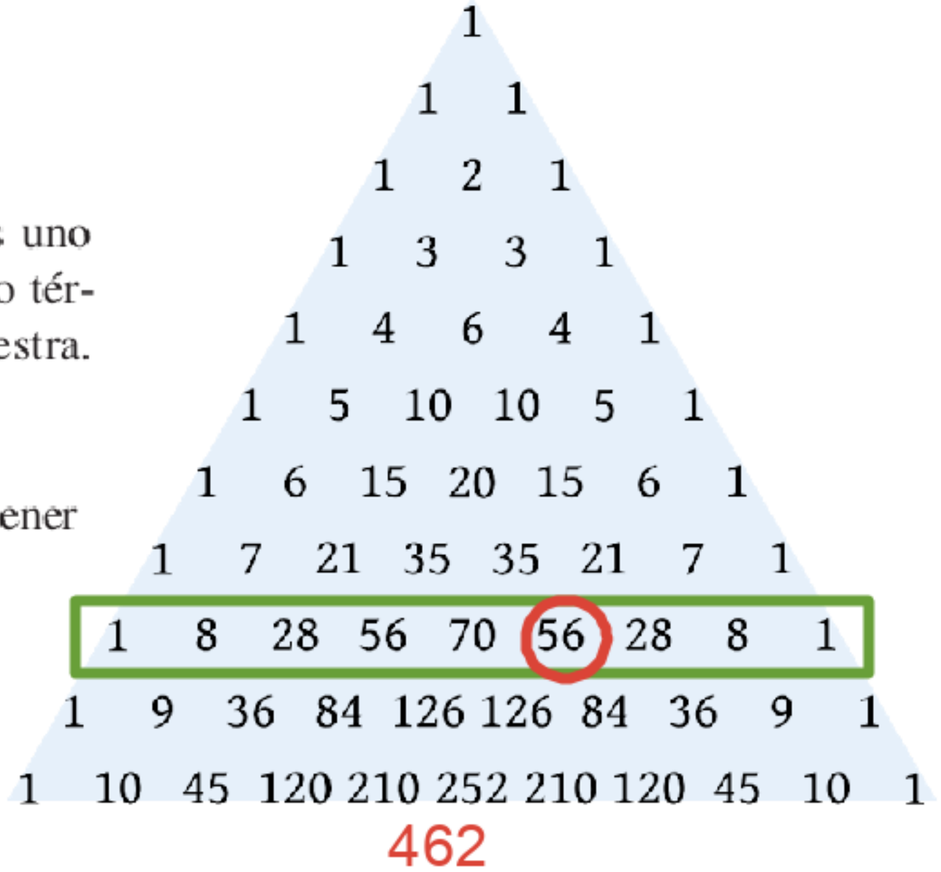
a. Recuerde que la fórmula es para el $(r + 1)$-ésimo término, de modo que r es uno menos que el número del término que se necesita. Por tanto, para hallar el sexto término de la expansión binomial, use $r = 5$, $n = 8$, $x = a$ y $y = 2b$, como se muestra.

$$\boxed{{}_8C_5 a^{8-5}(2b)^5 = 56 \cdot a^3 \cdot (2b)^5 = 56(2^5)a^3b^5 = 1792a^3b^5.}$$

b. En este caso, $n = 11$, $r = 5$, $x = 3a$ y $y = -2b$. Sustituya estos valores para obtener

$$\begin{aligned} {}_nC_r x^{n-r} y^r &= {}_{11}C_5(3a)^6(-2b)^5 \\ &= (462)(729a^6)(-32b^5) \\ &= -10\,777\,536a^6b^5. \end{aligned}$$

Por tanto, el coeficiente es $-10\,777\,536$.



Tarea semana 15 (MT060-TS145)

33 puntos

En los Ejercicios 5-14, calcule el coeficiente binomial.

10 x (0.5)

5. ${}_5C_3$
6. ${}_8C_6$
7. ${}_{12}C_0$
8. ${}_{20}C_{20}$
9. ${}_{20}C_{15}$
10. ${}_{12}C_5$
11. $\binom{10}{4}$
12. $\binom{10}{6}$
13. $\binom{100}{98}$
14. $\binom{100}{2}$

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

En los Ejercicios 15-18, evalúe usando el triángulo de Pascal.

04 x (0.5)

15. $\binom{6}{5}$
16. $\binom{9}{6}$
17. ${}_7C_4$
18. ${}_{10}C_2$

www.elsol

En los Ejercicios 41-44, expanda el binomio usando el triángulo de Pascal para determinar los coeficientes.

04 x (1.0)

41. $(2t - s)^5$
42. $(3 - 2z)^4$
43. $(x + 2y)^5$
44. $(3v + 2)^6$

En los Ejercicios 19-40, use el teorema del binomio para expandir y simplificar la expresión.

22 x (1.0)

19. $(x + 1)^4$
20. $(x + 1)^6$
21. $(a + 6)^4$
22. $(a + 5)^5$
23. $(y - 4)^3$
24. $(y - 2)^5$
25. $(x + y)^5$
26. $(c + d)^3$
27. $(2x + y)^3$
28. $(7a + b)^3$
29. $(r + 3s)^6$
30. $(x + 2y)^4$
31. $(3a - 4b)^5$
32. $(2x - 5y)^5$
33. $(x^2 + y^2)^4$
34. $(x^2 + y^2)^6$
35. $\left(\frac{1}{x} + y\right)^5$
36. $\left(\frac{1}{x} + 2y\right)^6$
37. $\left(\frac{2}{x} - y\right)^4$
38. $\left(\frac{2}{x} - 3y\right)^5$
39. $2(x - 3)^4 + 5(x - 3)^2$
40. $(4x - 1)^3 - 2(4x - 1)^4$

En los Ejercicios 45-52, encuentre el n-ésimo término de la expansión del binomio.

08 x (1.0)

16 puntos

+ bono de 4 puntos (válido si está completa la TS15)

45. $(x + y)^{10}, \quad n = 4$

46. $(x - y)^{6}, \quad n = 7$

47. $(x - 6y)^{5}, \quad n = 3$

48. $(x - 10z)^{7}, \quad n = 4$

49. $(4x + 3y)^{9}, \quad n = 8$

50. $(5a + 6b)^{5}, \quad n = 5$

51. $(10x - 3y)^{12}, \quad n = 10$

52. $(7x + 2y)^{15}, \quad n = 7$

En los Ejercicios 53-60, encuentre el coeficiente a del término de la expansión del binomio.

08 x (1.0)

Binomio	*Término*
53. $(x + 3)^{12}$	ax^5
54. $(x^2 + 3)^{12}$	ax^8
55. $(4x - y)^{10}$	ax^2y^8
56. $(x - 2y)^{10}$	ax^8y^2
57. $(2x - 5y)^{9}$	ax^4y^5
58. $(3x - 4y)^{8}$	ax^6y^2
59. $(x^2 + y)^{10}$	ax^8y^6
60. $(z^2 - t)^{10}$	az^4t^8

En los Ejercicios 53-60, encuentre el coeficiente a del término de la expansión del binomio.

Binomio	*Término*
53. $(x + 3)^{12}$	ax^5
54. $(x^2 + 3)^{12}$	ax^8
55. $(4x - y)^{10}$	ax^2y^8
56. $(x - 2y)^{10}$	ax^8y^2
57. $(2x - 5y)^{9}$	ax^4y^5
58. $(3x - 4y)^{8}$	ax^6y^2
59. $(x^2 + y)^{10}$	ax^8y^6
60. $(z^2 - t)^{10}$	az^4t^8

Bono: 4 puntos

elonario.net

49 puntos

Tabla de entrega	
Semanas de retraso	**Resta de porcentaje a la nota final**
1	15%
2	30%
3	45%
4	No se acepta

Recuerde:
Consultar a los profesores.