www.elsolucionario.net

6.2 Ley de los cosenos

Lo que debe aprender

- Usar la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos (LLL o LAL).
- Usar la ley de los cosenos para modelar y resolver problemas de la vida real.
- Usar la fórmula del área de Herón para hallar el área de un triángulo.

Por qué debe aprenderlo

Se puede usar la ley de los cosenos para resolver problemas de la vida real donde aparezcan triángulos oblicuángulos. Por ejemplo, en el Ejercicio 52 de la página 433 se puede usar la ley de los cosenos para aproximar la distancia que un jugador de béisbol debe correr para hacer una atrapada.

Daniel Bendjy/istockphoto.com

Introducción

Restan dos casos en la lista de las condiciones necesarias para resolver un triángulo oblicuángulo, LLL y LAL. Si nos dan tres lados (LLL), o dos lados y un ángulo incluido (LAL), ninguna de las relaciones de la ley de los senos estaría completa. En tales casos se puede usar la **ley de los cosenos.**

Ley de los cosenos

Forma estándar	*Forma alternativa*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Para una demostración de la ley de los cosenos, vea la página 488.

Ejemplo 1 Tres lados de un triángulo—LLL

Encuentre los tres ángulos del triángulo en la Figura 6.11.

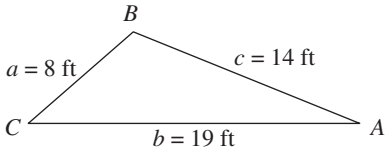


FIGURA 6.11

Solución

Es buena idea primero hallar el ángulo opuesto al lado más largo, el lado b en este caso. Usando la forma alternativa de la ley de los cosenos, podemos determinar que

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 14^2 - 19^2}{2(8)(14)} \approx -0.45089.$$

Como cos B es negativo, sabemos que B es un ángulo *obtuso* dado por $B \approx 116.80°$. En este punto, es más sencillo usar la ley de los senos para determinar A.

$$\operatorname{sen} A = a\left(\frac{\operatorname{sen} B}{b}\right) \approx 8\left(\frac{\operatorname{sen} 116.80°}{19}\right) \approx 0.37583$$

Sabemos que A debe ser agudo porque B es obtuso y un triángulo puede tener, como máximo, un ángulo obtuso. Entonces, $A \approx 22.08°$ y $C \approx 180° - 22.08° - 116.80° = 41.12°$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

www.elsolucionario.net

¿Ve usted por qué fue mejor hallar *primero* el ángulo mayor en el ejemplo 1? Si se conoce el coseno de un ángulo se puede determinar si éste es agudo u obtuso. Esto es,

$\cos\theta > 0$ para $0° < \theta < 90°$ Agudo

$\cos\theta < 0$ para $90° < \theta < 180°$. Obtuso

Entonces, en el ejemplo 1, una vez visto que el ángulo B es obtuso, reconocimos que los ángulos A y C eran agudos ambos. Si el ángulo mayor es agudo, los dos ángulos restantes también lo son.

Ejemplo 2 Dos lados y el ángulo incluido—LAL

Encuentre los ángulos restantes y lado del triángulo de la Figura 6.12.

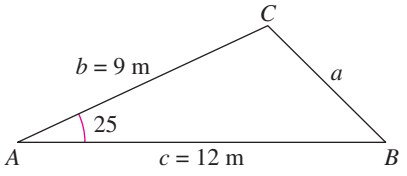


FIGURA 6.12

Solución

Use la ley de los cosenos para hallar el lado desconocido a en la figura.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2 = 9^2 + 12^2 - 2(9)(12)\cos 25°$$

$$a^2 \approx 29.2375$$

$$a \approx 5.4072$$

Como $a \approx 5.4072$ metros, sabemos la razón (sen A)/a y se puede usar la forma recíproca de la ley de los senos para despejar B.

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{a}$$

$$\operatorname{sen} B = b\left(\frac{\operatorname{sen} A}{a}\right)$$

$$= 9\left(\frac{\operatorname{sen} 25}{5.4072}\right)$$

$$\approx 0.7034$$

Hay dos ángulos entre 0º y 180º cuyo seno es 0.7034, el primero es $B_1 \approx 44.7°$ y el otro es $B_2 \approx 180° - 44.7° = 135.3°$.

Para $B_1 \approx 44.7°$,

$$C_1 \approx 180° - 25° - 44.7° = 110.3°.$$

Para $B_2 \approx 135.3°$,

$$C_2 \approx 180° - 25° - 135.3° = 19.7°.$$

Como el lado c es el lado más largo del triángulo, C debe ser el ángulo más grande del triángulo. Entonces, $B \approx 44.7°$ y $C \approx 110.3°$.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

Tip de estudio

Cuando resuelva un triángulo oblicuángulo dados tres ángulos, use la forma alternativa de la ley de los cosenos para despejar un ángulo. Cuando resuelva un triángulo oblicuángulo dados dos ángulos y su ángulo incluido, use la forma normal de la ley de los cosenos para despejar una incógnita.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Aplicaciones

Ejemplo 3 Una aplicación de la ley de los cosenos

El montículo de lanzamiento en un campo de *softbol* de mujeres está a 43 pies del *home* y la distancia entre las bases es 60 pies, como se ve en la Figura 6.13. (El montículo de lanzamiento no está a la mitad entre el *home* y la segunda base.) ¿A qué distancia está el montículo de la primera base?

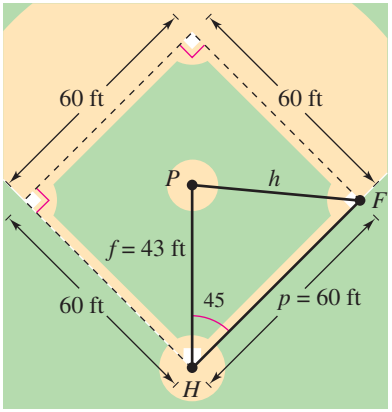


FIGURA 6.13

Solución

En el triángulo HPF, $H = 45°$ (la recta HP corta el ángulo recto en H), $f = 43$, y $p = 60$. Usando la ley de los cosenos para este caso de lado ángulo lado (LAL), tenemos

$$\begin{aligned} h^2 &= f^2 + p^2 - 2fp \cos H \\ &= 43^2 + 60^2 - 2(43)(60) \cos 45° \approx 1800.3. \end{aligned}$$

Por tanto, la distancia aproximada del montículo de lanzamiento a la primera base es

$$h \approx \sqrt{1800.3} \approx 42.43 \text{ pies.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Ejemplo 4 Una aplicación de la ley de los cosenos

Un barco navega 60 millas hacia el Este, luego ajusta su curso hacia el noreste, como se ve en la Figura 6.14. Después de navegar 80 millas en esa dirección, el barco se halla a 139 millas de su punto de salida. Describa el rumbo del punto B al punto C.

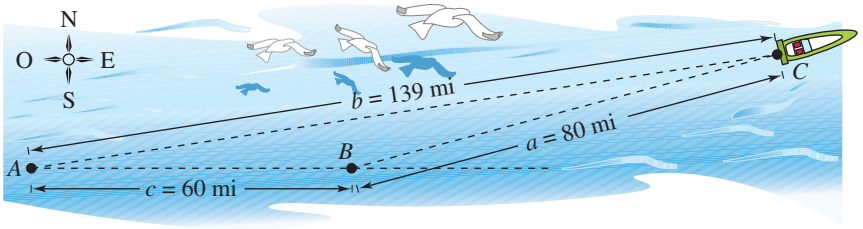


FIGURA 6.14

Solución

Tenemos $a = 80$, $b = 139$ y $c = 60$. Entonces, usando la forma alternativa de la ley de los cosenos, tenemos

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{80^2 + 60^2 - 139^2}{2(80)(60)} \\ &\approx -0.97094. \end{aligned}$$

Entonces, $B \approx \arccos(-0.97094) \approx 166.15°$, y entonces el rumbo medido hacia el Norte del punto B al punto C es

$$166.15° - 90° = 76.15°, \text{ o N } 76.15° \text{ E.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

www.elsolucionario.net

Fórmula del área de Herón

NOTA HISTÓRICA

Herón de Alejandría (hacia el año 100 a.C.) fue un geómetra e inventor griego. Sus obras describen la forma de hallar las áreas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares con 3 a 12 lados y círculos, así como las áreas superficiales y volúmenes de objetos tridimensionales.

La ley de los cosenos se puede usar para establecer la siguiente fórmula para el área de un triángulo. Esta fórmula recibe el nombre de **fórmula del área de Herón** en honor al matemático griego Herón (hacia el año 100 a.C.).

Fórmula del área de Herón

Dado cualquier triángulo con lados de longitudes a, b y c, el área del triángulo es

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = (a + b + c)/2$.

Para una demostración de la fórmula del área de Herón, vea la página 489.

Ejemplo 5 Uso de la fórmula del área de Herón

Encuentre el área de un triángulo que tenga lados de longitudes $a = 43$ metros, $b = 53$ metros y $c = 72$ metros.

Solución

Como $s = (a + b + c)/2 = 168/2 = 84$, la fórmula del área de Herón produce

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ &= \sqrt{84(41)(31)(12)}\\ &\approx 1131.89 \text{ metros cuadrados.}\end{aligned}$$

www.elsolucionario.net

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Hasta este punto el lector ha estudiado tres fórmulas para el área de un triángulo.

Fórmula normal: Área $= \frac{1}{2}bh$

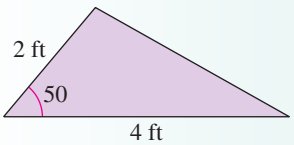
Triángulo oblicuángulo: Área $= \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B$

Fórmula del área de Herón: Área $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

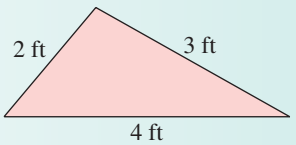
Discusión en clase

El área de un triángulo Use la fórmula más apropiada para hallar el área de cada uno de los triángulos siguientes. Demuestre su trabajo y dé sus razones para escoger cada fórmula.

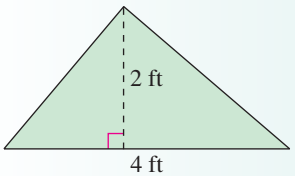
a.



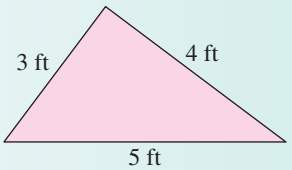
b.



c.



d.



www.elsolucionario.net

6.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

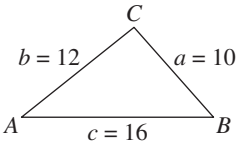
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Si nos dan tres lados de un triángulo, usaríamos la ley de _____ para hallar los tres ángulos del triángulo.
2. Si nos dan dos ángulos y cualquier lado de un triángulo, usaríamos la ley de _____ para resolver el triángulo.
3. La forma estándar de la ley de los cosenos para $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ es _____ .
4. La ley de los cosenos se puede usar para establecer una fórmula para hallar el área de un triángulo llamada fórmula _____ _____ _____ _____.

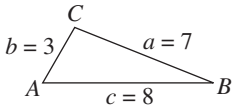
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-20, use la ley de cosenos para resolver el triángulo. Redondee sus respuestas a dos lugares decimales.

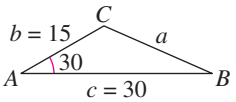
5.



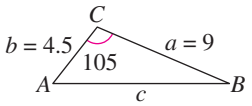
6.



7.



8.



9. $a = 11, \quad b = 15, \quad c = 21$

10. $a = 55, \quad b = 25, \quad c = 72$

11. $a = 75.4, \quad b = 52, \quad c = 52$

12. $a = 1.42, \quad b = 0.75, \quad c = 1.25$

13. $A = 120°, \quad b = 6, \quad c = 7$

14. $A = 48°, \quad b = 3, \quad c = 14$

15. $B = 10° \, 35', \quad a = 40, \quad c = 30$

16. $B = 75° \, 20', \quad a = 6.2, \quad c = 9.5$

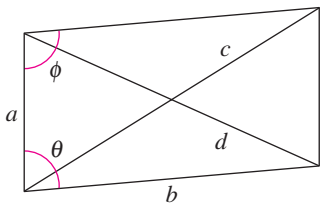
17. $B = 125° \, 40', \quad a = 37, \quad c = 37$

18. $C = 15° \, 15', \quad a = 7.45, \quad b = 2.15$

19. $C = 43°, \quad a = \frac{4}{9}, \quad b = \frac{7}{9}$

20. $C = 101°, \quad a = \frac{3}{8}, \quad b = \frac{3}{4}$

En los Ejercicios 21-26, complete la tabla al resolver el paralelogramo que se ve en la figura siguiente. (Las longitudes de las diagonales están dadas por *c* y *d*.)



	a	b	c	d	θ	ϕ
21.	5	8			45°	
22.	25	35				120°
23.	10	14	20			
24.	40	60		80		
25.	15		25	20		
26.		25	50	35		

En los Ejercicios 27-32, determine si es necesaria la ley de los senos o la de los cosenos para resolver el triángulo. A continuación resuelva el triángulo.

27. $a = 8, \quad c = 5, \quad B = 40°$

28. $a = 10, \quad b = 12, \quad C = 70°$

29. $A = 24°, \quad a = 4, \quad b = 18$

30. $a = 11, \quad b = 13, \quad c = 7$

31. $A = 42°, \quad B = 35°, \quad c = 1.2$

32. $a = 160, \quad B = 12°, \quad C = 7°$

En los Ejercicios 33-40, use la fórmula del área de Herón para hallar el área del triángulo.

33. $a = 8, \quad b = 12, \quad c = 17$

34. $a = 33, \quad b = 36, \quad c = 25$

35. $a = 2.5, \quad b = 10.2, \quad c = 9$

36. $a = 75.4, \quad b = 52, \quad c = 52$

37. $a = 12.32, \quad b = 8.46, \quad c = 15.05$

38. $a = 3.05, \quad b = 0.75, \quad c = 2.45$

39. $a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{3}{4}$

40. $a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{5}{8}, \quad c = \frac{3}{8}$

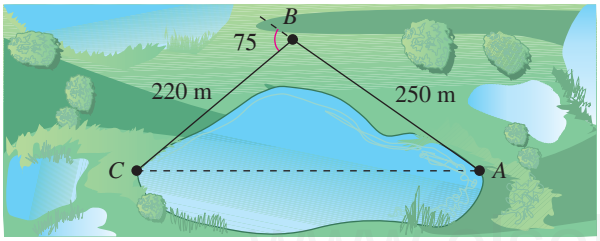
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

41. NAVEGACIÓN Una carrera de botes corre a lo largo de un curso triangular marcado por las boyas A, B y C. La carrera se inicia con los botes dirigidos al Oeste por 3700 metros. Los otros dos lados del curso están al Norte del primer lado, y sus longitudes son 1700 metros y 3000 metros. Trace una figura que dé una representación visual de la situación y encuentre los rumbos para los dos últimos tramos de la carrera.

42. NAVEGACIÓN Un avión vuela 810 millas de Franklin a Centerville con un rumbo de 75º. A continuación vuela 648 millas de Centerville a Rosemount con un rumbo de 32º. Trace una figura que visualmente represente la situación, y encuentre la distancia en línea recta y rumbo de Franklin a Rosemount.

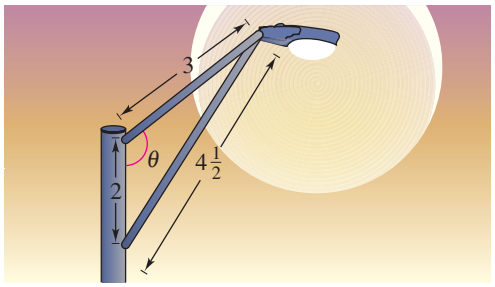
43. TOPOGRAFÍA Para aproximar la longitud de un pantano, un topógrafo camina 250 metros del punto A al punto B, luego gira 75º y camina 220 metros al punto C (vea figura). Aproxime la longitud AC del pantano.



44. TOPOGRAFÍA Un lote de terreno triangular tiene 115 metros de frente y los otros límites tienen longitudes de 76 metros y 92 metros. ¿Qué ángulos forma el frente con los otros dos límites?

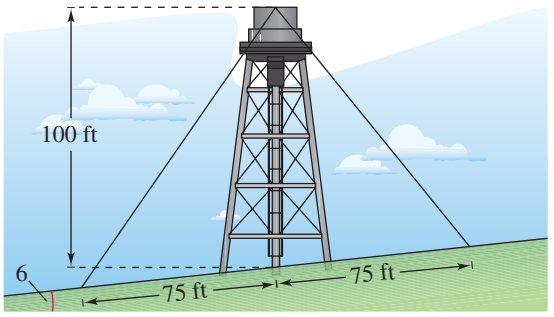
45. TOPOGRAFÍA Un lote de terrero triangular tiene lados de longitudes 725 pies, 650 pies y 575 pies. Encuentre la medida del ángulo más grande.

46. DISEÑO DE UN FAROL DE ALUMBRADO PÚBLICO Determine el ángulo θ en el diseño del farol de alumbrado que se ve en la figura.



47. DISTANCIA Dos barcos salen de puerto a las 9:00 A.M. Uno de ellos navega con rumbo N 53º O a 12 millas por hora y el otro navega con rumbo S 67º O a 16 millas por hora. Aproxime a qué distancia estarán entre sí al mediodía de ese día.

48. LONGITUD Una torre vertical de 100 pies ha de erigirse en el costado de una colina que forma un ángulo de 6º con la horizontal (vea figura). Encuentre la longitud de cada uno de los cables llamados "vientos" que estarán anclados a 75 pies cuesta arriba y cuesta abajo de la base de la torre.



49. NAVEGACIÓN En un mapa, Orlando está a 178 milímetros al sur de Niagara Falls, Denver está a 273 milímetros de Orlando y Denver está a 235 milímetros de Niagara Falls (vea figura).

(a) Encuentre el rumbo de Denver desde Orlando.

(b) Encuentre el rumbo de Denver desde Niágara Falls.

50. NAVEGACIÓN En un mapa, Minneapolis está a 165 milímetros al Oeste de Albany, Phoenix está a 216 milímetros de Minneapolis, y Phoenix está a 368 milímetros de Albany (vea figura).

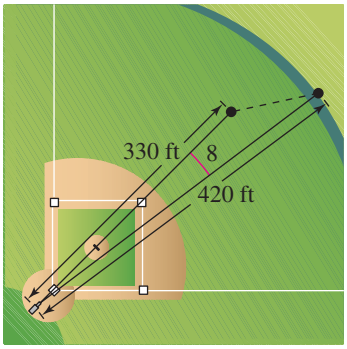
(a) Encuentre el rumbo de Minneapolis desde Phoenix.

(b) Encuentre el rumbo de Albany desde Phoenix.

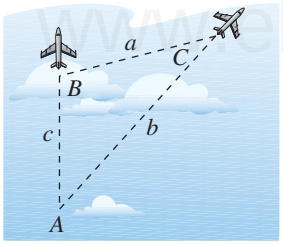
51. BÉISBOL En un "diamante" de béisbol con 90 pies por lado, el montículo del lanzador está a 60.5 pies del home. ¿Cuál es la distancia del montículo del lanzador a la tercera base?

www.elsolucionario.net

52. BÉISBOL Un jugador situado en el campo central está jugando a aproximadamente 330 pies de la cámara de TV que está detrás del *home*. Un bateador conecta un elevado que va a la barda que está a 420 pies de la cámara (vea figura). La cámara gira 8º para seguir la jugada. ¿Aproximadamente cuánto debe correr el jardinero central para hacer la atrapada?

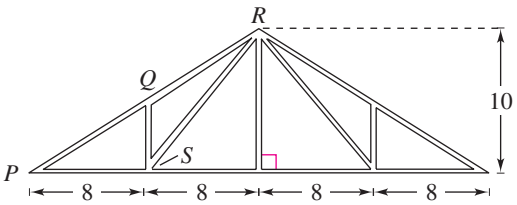


53. RASTREO DE AVIONES Para determinar la distancia entre dos aviones, una estación de rastreo continuamente determina la distancia a cada avión y el ángulo A entre ellos (vea figura). Determine la distancia a entre los aviones cuando $A = 42°$, $b = 35$ millas y $c = 20$ millas.



54. RASTREO DE AVIONES Use la figura para el Ejercicio 53 para determinar la distancia a entre los aviones cuando $A = 11°$, $b = 20$ millas y $c = 20$ millas.

55. ESTRUCTURAS Q es el punto medio del segmento de recta $\overline{PR}$ del travesaño de la estructura que se ve en la figura. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos de recta $\overline{PQ}$, $\overline{QS}$ y $\overline{RS}$?



56. DISEÑO DE MÁQUINAS Una máquina tiene una biela de 7 pulgadas conectada a un cigüeñal (vea figura).

(a) Use la ley de los cosenos para escribir una ecuación que dé la relación entre x y θ.

(b) Escriba x como función de θ. (Seleccione el signo que dé valores positivos de x.)

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función del inciso (b).

(d) Use la gráfica del inciso (c) para determinar la distancia máxima que el pisón se mueve en un ciclo.

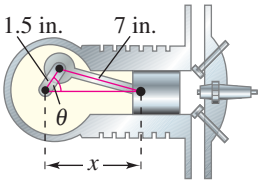


FIGURA PARA EJ. 56

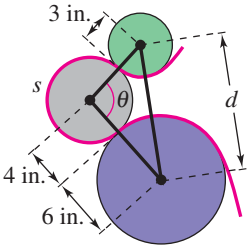
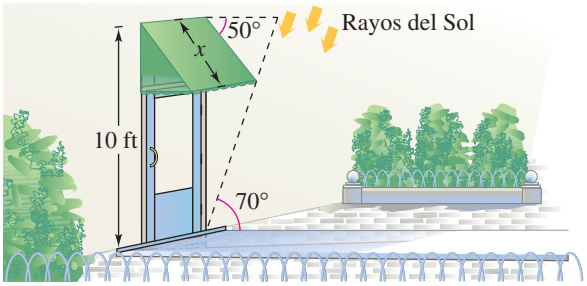


FIGURA PARA EJ. 57

57. MANUFACTURA DE PAPEL En un proceso con papel continuo, el papel pasa por tres rodillos con radios de 3 pulgadas, 4 pulgadas y 6 pulgadas (vea figura). Los centros de los rodillos de 3 pulgadas y de 6 pulgadas están a d pulgadas entre sí, y la longitud del arco en contacto con el papel en el rodillo de 4 pulgadas es s pulgadas. Complete la tabla.

d (pulgadas)	9	10	12	13	14	15	16
θ (grados)							
s (pulgadas)							

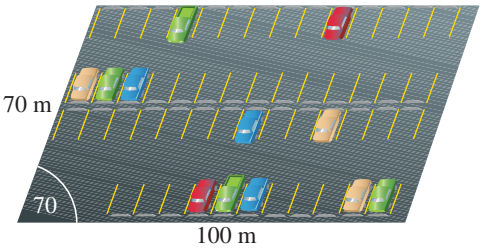
58. DISEÑO DE TOLDOS Un toldo retráctil colocado arriba de una puerta de patio se baja a un ángulo de 50º desde la pared exterior a una altura de 10 pies sobre el suelo (vea figura). No debe incidir luz directa a la puerta cuando el ángulo de elevación del Sol sea mayor a 70º. ¿Cuál es la longitud x del toldo?



59. GEOMETRÍA Las longitudes de los lados de un lote de terreno triangular son aproximadamente 200 pies, 500 pies y 600 pies. Aproxime el área del terrero.

www.elsolucionario.net

60. GEOMETRÍA Un lote de estacionamiento tiene la forma de un paralelogramo (vea figura). Las longitudes de dos lados adyacentes son 70 metros y 100 metros. El ángulo entre los dos lados es 70º. ¿Cuál es el área del lote de estacionamiento?



61. GEOMETRÍA Una persona desea comprar un lote triangular con medidas de 510 yardas por 840 yardas por 1120 yardas. El precio del terreno es de $2000 por acre. ¿Cuánto cuesta el terreno? (*Sugerencia:* 1 acre = 4840 yardas cuadradas.)

62. GEOMETRÍA Una persona desea comprar un lote triangular con medidas de 1350 pies por 1860 pies por 2490 pies. El precio del terreno es de $2200 por acre. ¿Cuánto cuesta el terreno? (*Sugerencia:* 1 acre = 43 560 pies cuadrados.)

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 63 y 64, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

63. En la fórmula del área de Herón, s es el promedio de las longitudes de los tres lados del triángulo.

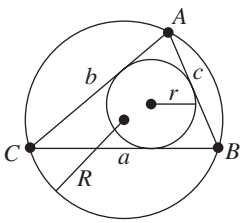
64. Además de LLL (lado lado lado) y LAL (lado ángulo lado), la ley de los cosenos se puede usar para resolver triángulos con condiciones LLA.

65. ESCRITURA Un triángulo tiene longitudes de lado de 10 centímetros, 16 centímetros y 5 centímetros. ¿Puede usarse la ley de los cosenos para resolver el triángulo? Explique.

66. ESCRITURA Dado un triángulo con $b = 47$ metros, $A = 87°$ y $C = 110°$, ¿puede usarse la ley de los cosenos para resolver el triángulo? Explique.

67. CÍRCULOS CIRCUNSCRITOS E INSCRITOS Sean R y r los radios de los círculos circunscritos e inscritos de un triángulo ABC, respectivamente (vea figura), y sea

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$



(a) Demuestre que $2R = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

(b) Demuestre que $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

CÍRCULOS CIRCUNSCRITOS E INSCRITOS En los Ejercicios 68 y 69, use los resultados del Ejercicio 67.

68. Dado un triángulo con $a = 25$, $b = 55$ y $c = 72$, encuentre las áreas de (a) el triángulo, (b) el círculo circunscrito y (c) el círculo inscrito.

69. Encuentre la longitud de la máxima pista de carreras circular que se pueda construir en una parte de propiedad con lados de longitudes de 200 pies, 250 pies y 325 pies.

70. PIÉNSELO ¿Qué conocida fórmula se obtiene cuando se usa la tercera forma de la ley de los cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, y se hace $C = 90°$? ¿Cuál es la relación entre la ley de los cosenos y esta fórmula?

71. PIÉNSELO En el Ejemplo 2, suponga que $A = 115°$. Después de despejar a, ¿cuál ángulo resolvería a continuación, B o C? ¿Hay dos posibles soluciones para qué ángulo? Si es así, ¿cómo puede determinarse cuál ángulo es la solución correcta?

72. ESCRITURA Describa la forma en que se puede usar la ley de los cosenos para resolver el caso ambiguo del triángulo oblicuángulo ABC, donde $a = 12$ pies, $b = 30$ pies y $A = 20°$. ¿El resultado es igual que cuando se usa la ley de los senos para resolver el triángulo? Describa las ventajas y las desventajas de cada método.

73. ESCRITURA En el Ejercicio 72, la ley de los cosenos se utilizó para resolver un triángulo en el caso LLA (lado lado ángulo) de dos soluciones. ¿Se puede usar la ley de los cosenos para resolver casos sin solución y de una sola solución de LLA? Explique.

74. TOQUE FINAL Determine si es necesaria la ley de los senos o la ley de los cosenos para resolver el triángulo.

(a) A, C y a (b) a, c y C
(c) b, c y A (d) A, B y c
(e) b, c y C (f) a, b y c

75. DEMOSTRACIÓN Use la ley de los cosenos para demostrar que

$$\frac{1}{2}bc(1 + \cos A) = \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2}.$$

76. DEMOSTRACIÓN Use la ley de los cosenos para demostrar que

$$\frac{1}{2}bc(1 - \cos A) = \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}.$$