Provincia Hermanas Mirabal, República Dominicana

Liceo Científico Dr. Miguel Canela Lázaro

Centro de Excelencia Académica

Introducción a Matrices

Profesores:

- Frank Cepeda
- Kelvin Cuevas

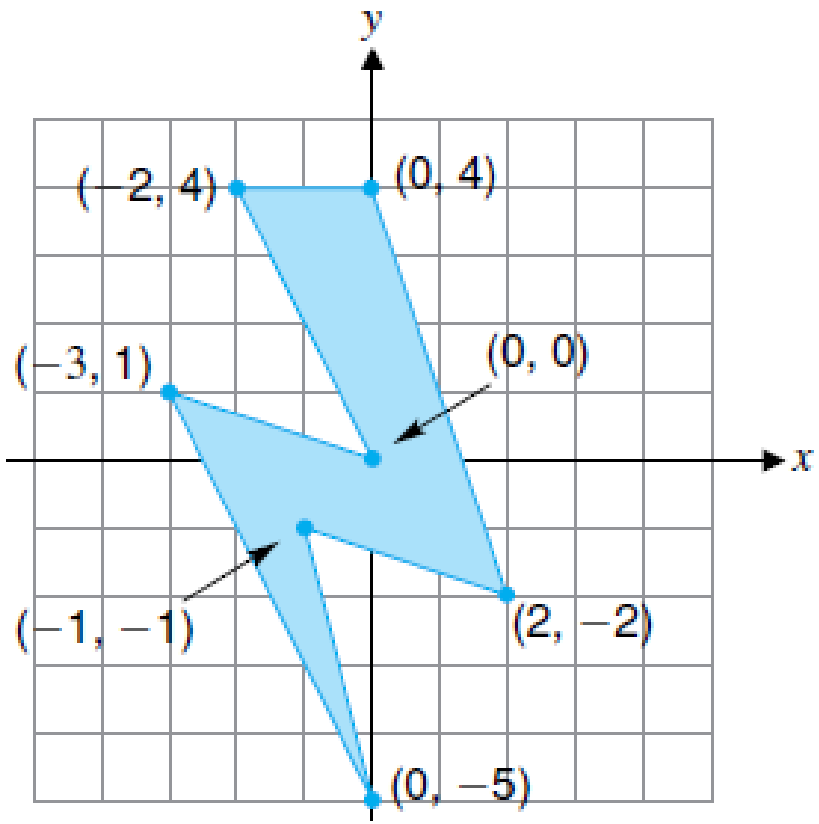
Año escolar 20-21

¿Por qué es importante el estudio de las matrices?

- Porque las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc...

Ejemplo de aplicación

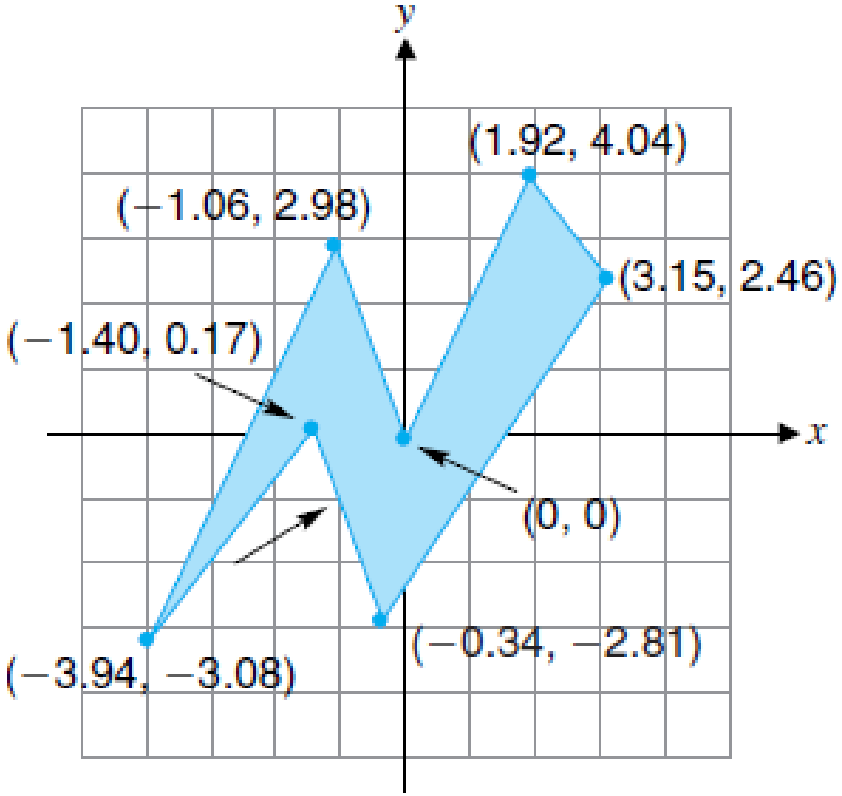
- Las matrices, tema de este capítulo, son arreglos de números. Las matrices y su álgebra respectiva tienen una aplicación potencial siempre que una información numérica se pueda acomodar de manera significativa en bloques rectangulares.
- Un área de aplicación del álgebra matricial son las gráficas por computadora. En un sistema de coordenadas, un objeto puede representarse por medio de una matriz que contenga las coordenadas de cada vértice o esquina. Por ejemplo, podríamos configurar un esquema de conexión por puntos en el que el rayo que se muestra esté representado por la matriz de la derecha.



$$\begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de aplicación

- Con frecuencia las gráficas por computadora muestran objetos que giran en el espacio. En una computadora, la rotación se realiza por medio de una multiplicación de matrices. El rayo se gira 52 grados en contra del sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen, esto por medio de la multiplicación de matrices, que incluye una matriz cuyas entradas son funciones trigonométricas del ángulo de rotación:



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 52^\circ & -\operatorname{sen} 52^\circ \\ \operatorname{sen} 52^\circ & \cos 52^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.92 & 4.04 \\ 3.15 & 2.46 \\ -0.34 & -2.81 \\ -1.40 & 0.17 \\ -3.94 & -3.08 \\ -1.06 & 2.98 \end{bmatrix}$$

Matrices

- La búsqueda de formas para describir situaciones en matemáticas y economía, condujo al estudio de arreglos rectangulares de números. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ 9x - 6y + 2z = 0. \end{cases}$$

- Lo que caracteriza a este sistema son los coeficientes numéricos en las ecuaciones, junto con sus posiciones relativas. Por esta razón, el sistema puede describirse por el arreglo rectangular

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix},$$

que es llamado *matriz* (plural: *matrices*). Consideraremos a tales arreglos rectangulares como objetos por sí mismos; se acostumbra encerrarlos entre corchetes, y también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices usaremos letras mayúsculas en negritas como **A, B, C,** etcétera.

Advertencia No utilice barras verticales, | |, en lugar de corchetes o paréntesis, ya que ellas tienen un significado diferente.

Matrices

- Con frecuencia, en economía es conveniente utilizar matrices en la formulación de problemas y para exhibir datos. Por ejemplo, un fabricante que manufactura los productos A, B y C, podría representar las unidades de mano de obra y material involucrados en una semana de producción de estos artículos, como se muestra en la tabla 6.1. De manera más sencilla, estos datos pueden representarse por la matriz

TABLA 6.1

	Producto		
	A	B	C
Mano de obra	10	12	16
Material	5	9	7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

- Los renglones o filas de una matriz están numerados de manera consecutiva de arriba hacia abajo, y las columnas están numeradas de manera consecutiva de izquierda a derecha. Para la matriz A anterior, tenemos

$$\begin{array}{c} \\ \text{renglón 1} \\ \text{renglón 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}.$$

Organización de datos en tablas o matrices

Algo que debes aprender muy bien, es interpretar y organizar datos e informaciones en una matriz. A continuación te presentamos un ejemplo.

Un constructor hace una urbanización con tres acabados: superlujo (S), Lujo (L) y normal (N). De cada tipo piensa hacer A (Pisos), B (Apartamentos) y C (Estudios). De superlujo piensa construir 10 pisos, 12 apartamentos y 3 estudios, de Lujo, respectivamente, 12, 20 y 7 y viviendas normales 34, 47 y 11 respectivamente. Cada piso tiene 8 ventanas y siete puertas, cada apartamento 6 ventanas y 5 puertas y cada estudio 9 ventanas y 3 puertas.

a) Escribe una matriz P que exprese el número de cada tipo de vivienda según los acabados y otra matriz M que describa el número de puertas y ventanas en cada tipo de vivienda.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} Pis & Ap & Est \end{array} \\ \begin{array}{r} Sup \\ Acabados\ Luj \\ Nor \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 12 & 3 \\ 12 & 20 & 7 \\ 34 & 47 & 11 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{P}$$

$$\mathrm{M} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} V & P \end{array} \\ \begin{array}{r} Pis \\ Apa \\ Est \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Ejemplo de interpretación de un dato de la matriz (P). El 20, significa que se construirán 20 apartamentos con acabados de lujo.

c) El 9 en la matriz (M) significa que cada estudio tendrá 9 ventanas.

d) ¿Seria capaz de calcular una matriz que exprese el número de puertas y ventanas que son necesarias en cada tipo de acabado? Si no puedes, entonces presta atención al desarrollo del temas, que esa, es una de las cosas que aprenderás en esta unidad.

Concepto de matriz

- Una matriz es un arreglo rectangular de números ordenados en filas (renglón) y columnas.
- a_{ij} representa un elemento cualquiera de la matriz.
- (i) indica la fila o renglón a que pertenece cada elemento de la matriz.
- (j) indica la columna a que pertenece cada elemento de la matriz.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij} \right]$$

$$\begin{array}{c} a_{31} \\ \downarrow \\ \text{Renglón} \end{array} \rightarrow \text{Columna} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & & C_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \\ R_m \end{array}$$

Donde: $R_1, R_2, \dots, R_n$ son renglones y $C_1, C_2, \dots, C_n$ son columnas.

Identificación de entradas o elementos de una matriz a_{ij}

- Dada la siguiente matriz, determina: a_{21}, a_{22}, a_{33}, a_{43}

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -7 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a_{21}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 1, es decir, $a_{21} = -3$

a_{22}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 2, es decir, $a_{22} = 4$

a_{33}: es el valor que se encuentra en el renglón 3, columna 3, es decir, $a_{33} = -7$

a_{43}: es el valor que se encuentra en el renglón 4, columna 3, es decir, $a_{43} = 1$

Orden de una matriz o Tamaño :

- El tamaño de una matriz de *m filas o* renglones y *n* columnas se conoce como orden de la matriz y se denota por ($m \times n$) o ($m*n$).
- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Orden de A = (1x3)
Porque la matriz A, tiene 1 fila y 3 columnas.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

Orden de B= (3x1)
Porque la matriz B, tiene 3 renglones y 1 columna.

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Orden de C = (2x2)
Porque la matriz C tiene 2 filas y 2 columnas.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Orden de D = (2x3)
Porque la matriz D tiene 2 renglones y 3 columnas.

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden de E= (2x3)

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden de F= (3x2)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Orden de G= (1x5)

Matriz traspuesta A → A^t

Si **A** es una matriz, la matriz que se forma a partir de **A** por intercambio de sus renglones con sus columnas se conoce como la *transpuesta* de **A.**

Definición

La ***transpuesta*** de una matriz **A** de $m \times n$, denotada $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, es la matriz de $n \times m$ cuyo i-ésimo renglón es la i-ésima columna de **A.**

$$Si\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, encontrar\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Solución: la matriz **A** es de 2×3, de modo que $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ es de 3×2. La columna 1 de **A** se convierte en el renglón 1 de $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, la columna 2 se convierte en el renglón 2 y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Por tanto,

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Diagonales de una matriz:

a. <u>Diagonal principal</u>: elementos de la forma a_{ii}, es decir en la diagonal que va desde a_{11} hasta a_{nn}

b. <u>Diagonal secundaria</u>: elementos de la forma a_{ij} donde $i+j=n+1$, es decir los elementos en la diagonal que va desde a_{1n} hasta a_{n1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 8 & 9 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

—— Diagonal principal i=j

Diagonal Principal

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal Secundaria

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota:
Solo se le determina diagonal principal y secundaria a las matrices que tienen el mismo numero de filas y columnas.
Es decir a matrices cuadradas.

Traza de una matriz:

- Es la sumatoria de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada, es decir,

$$Tr\left(A_n\right) = \sum_{i=j=1}^{n} a_{ij} \text{ para } i = j.$$

- Ejemplos:
- Hallar la traza de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}. \quad Tr\left(A\right) = a_{11} + a_{22} = 2 + 7 = 9$$

- Hallar la traza de la matriz

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad Tr\left(D\right) = d_{11} + d_{22} + d_{33} = 3 - 7 + 4 = 0$$

Matrices Opuestas

- Dos **matrices son opuestas** cuando sus elementos correspondientes son opuestos.

Nota: Las matrices deben tener el mismo tamaño.

Ejemplo

Determine la opuesta de la matriz A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Opuesta de A= $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

- **Matrices Iguales:**
- Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y los elementos correspondientes, son iguales.

$$A = B? \qquad a_{ij} = b_{ij}\,.$$

- Ejemplo1:
- Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} w & z \\ y & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2 &= w \\ 5 &= z \\ 4 &= y \\ 7 &= t \end{aligned}$$

- **Matrices Iguales:**

Ejemplo2:

Dada la siguiente igualdad, determine los valores de x, y, z

$$\begin{bmatrix} 2x+1 & 2 \\ 4y-6 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x+1 & 2 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución. Si las matrices son iguales, entonces se cumple que:

$2x+1 = 5x+1$

$2x-5x = 1-1$

$-3x = 0$

$x = \frac{0}{-3}$

$x = 0$

$4y-6 = 10$

$4y = 10+6$

$4y = 16$

$y = \frac{16}{4}$

$y = 4$

$z = 6$

Por tanto

$x = 0$

$y = 4$

$z = 6$

Clasificación de las matrices

según el número de filas y columnas

- **Matriz Columna o Vector Columna**: Es aquella matriz que tiene una sola columna. $A_{m\times 1}$
- Ejemplos:

a) $A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1m} \end{bmatrix}$

b) $M_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

- **Matriz Fila o Vector Fila**: es aquella matriz que tiene una sola fila. $A_{1\times n}$
- Ejemplos:

a) $A_{1\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$

b) $M_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

Clasificación de las matrices

según el número de filas y columnas

- **Matriz cuadrada.** Es aquella cuyo número de renglones es igual al número de columnas; es decir, una matriz de *n* renglones con *n* columnas, recibe el nombre de matriz cuadrada de orden *n*.
- **Nota:** cuando la matriz es cuadrada el orden se puede indicar con un solo valor .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden *n*

Ejemplos

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de orden 3

Clasificación de las matrices

según el número de filas y columnas

- **Matriz Rectangular:** es aquella donde el número de filas es diferente al número de columnas, es decir .

Ejemplo:

- $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ -4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -6 & 0 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$

Clasificación de las matrices

Según su simetría

- **Matriz simétrica.**
- Es aquella matriz cuadrada de orden n, tal que los elementos $a_{ij} = a_{ji}$
- Es una matriz cuadrada que coincide con su traspuesta. $A = A^t$

Ejemplo: Pruebe si $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ es simétrica.

- Tenemos que $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
- $\therefore A = A^t$ por tanto A es simétrica.

- **Matriz Antisimétrica:**
- Es aquella matriz cuyos elementos de la diagonal principal es igual a cero y los elementos que equidistan de ella son opuestos, es decir, aquella matriz que es igual a la opuesta de su transpuesta.

Ejemplo: Pruebe si $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ es antisimétrica.

- Tenemos que $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$
- $\therefore A = -A^t$ por tanto A es antisimétrica.

Nota:
Hay matrices que no son simétricas ni antisimétricas.

Clasificación de las matrices

Según sus elementos

- **Matriz Nula o matriz cero** : es aquella en la que todos sus elementos son iguales a cero.
- Se representa por (0)

- Ejemplos:

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Advertencia No confunda la matriz **O** con el número real 0.

Clasificación de las matrices

Según sus elementos

- Una Matriz es Diagonal cuando los elementos que no están en la diagonal principal son cero.

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Una Matriz es Escalar cuando es diagonal y los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Una Matriz es Unidad o Identidad cuando es escalar y el escalar es 1.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Clasificación de las matrices

Según sus elementos

- **Matriz triangular superior:** es cuando todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.
- Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior**: Se dice que una matriz cuadrada es triangular inferior si todos los componentes que se encuentran arriba de la diagonal principal son cero,
- Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Fuentes bibliográficas

- Matematicas Aplicadas a La Administración y a la Economía - Arya, Lardner, Ibarra - 5ed
- 10ma edicion de matematicas para la administración y la economía.