# 3.2 Funciones logarítmicas y sus gráficas

### Lo que debe aprender

- Reconocer y evaluar funciones logarítmicas con base *a*.
- Graficar funciones logarítmicas.
- Reconocer, evaluar y graficar funciones logarítmicas naturales.
- Usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real.

### Por qué debe aprenderlo

Con frecuencia se usan funciones logarítmicas para modelar observaciones científicas. Por ejemplo, en el Ejercicio 97 de la página 236 se utilizó una función logarítmica para modelar la memoria humana.

© Ariel Skelley/Corbis

## Funciones logarítmicas

En la Sección 1.9 usted estudió el concepto de función inversa. Ahí, aprendió que si una función es biunívoca, esto es, si la función tiene la propiedad de que ninguna recta horizontal interseca su gráfica más de una vez, la función debe tener una inversa. Si observa de nuevo las gráficas de las funciones exponenciales introducidas en la Sección 3.1, verá que toda función de la forma $f(x) = a^x$ pasa la prueba de la recta horizontal y por tanto debe tener una inversa. Esta función inversa se denomina **función logarítmica con base *a***.

### Definición de función logarítmica con base *a*

Para $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$y = \log_a x \text{ si y sólo si } x = a^y.$$

La función dada por

$$f(x) = \log_a x$$ léase como "logaritmo base *a* de *x*".

se llama **la función logarítmica con base *a*.**

Las ecuaciones

$$y = \log_a x \qquad \text{y} \qquad x = a^y$$



son equivalentes. La primera ecuación está en forma logarítmica y la segunda en forma exponencial. Por ejemplo, la ecuación logarítmica $2 = \log_3 9$ se puede reescribir en forma exponencial como $9 = 3^2$. La ecuación exponencial $5^3 = 125$ se puede reescribir en forma logarítmica como $\log_5 125 = 3$.

Al evaluar logaritmos, recuerde que *un logaritmo es un exponente*. Esto significa que $\log_a x$ es el exponente al que $a$ debe elevarse para obtener $x$. Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ porque 2 debe elevarse a la tercera potencia para dar 8.

### Ejemplo 1 Evaluar logaritmos

Use la definición de función logarítmica para evaluar cada uno de los siguientes logaritmos al valor indicado de $x$.

**a.** $f(x) = \log_2 x, \quad x = 32$ **b.** $f(x) = \log_3 x, \quad x = 1$

**c.** $f(x) = \log_4 x, \quad x = 2$ **d.** $f(x) = \log_{10} x, \quad x = \frac{1}{100}$

#### Solución

**a.** $f(32) = \log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32.$

**b.** $f(1) = \log_3 1 = 0$ porque $3^0 = 1.$

**c.** $f(2) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$ porque $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2.$

**d.** $f\left(\frac{1}{100}\right) = \log_{10} \frac{1}{100} = -2$ porque $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}.$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

La función logarítmica con base 10 se llama **función logarítmica común.** Está denotada por $\log_{10}$ o simplemente por log. En casi todas las calculadoras esta función está denotada por LOG. El Ejemplo 2 muestra cómo usar una calculadora para evaluar funciones logarítmicas comunes. En la siguiente sección, aprenderá a usar una calculadora para resolver logaritmos a cualquier base.

### Ejemplo 2 Evaluar logaritmos comunes en una calculadora

Use calculadora para evaluar la función dada por $f(x) = \log x$ en cada valor de $x$.

**a.** $x = 10$ **b.** $x = \frac{1}{3}$ **c.** $x = 2.5$ **d.** $x = -2$

**Solución**

| *Valor de la función* | *Tecleo en calculadora de gráficas* | *Pantalla* |
|---|---|---|
| **a.** $f(10) = \log 10$ | LOG 10 ENTER | 1 |
| **b.** $f\left(\frac{1}{3}\right) = \log \frac{1}{3}$ | LOG ( 1 ÷ 3 ) ENTER | $-0.4771213$ |
| **c.** $f(2.5) = \log 2.5$ | LOG 2.5 ENTER | 0.3979400 |
| **d.** $f(-2) = \log(-2)$ | LOG (−) 2 ENTER | ERROR |

Observe que la calculadora exhibe un mensaje de error (o un número complejo) cuando el usuario trata de evaluar $\log(-2)$. La razón de esto es que no hay una potencia de número real a la cual 10 se pueda elevar para obtener $-2$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

Las siguientes propiedades se obtienen directamente de la definición de la función logarítmica con base $a$



**Propiedades de los logaritmos.**

**1.** $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$.

**2.** $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$.

**3.** $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$ Propiedades inversas

**4.** Si $\log_a x = \log_a y$, entonces $x = y$. Propiedad biunívoca

### Ejemplo 3 Usar las propiedades de los logaritmos

**a.** Simplificar: $\log_4 1$ **b.** Simplificar: $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7}$ **c.** Simplificar: $6^{\log_6 20}$

**Solución**

**a.** Usando la propiedad 1, se deduce que $\log_4 1 = 0$.

**b.** Usando la propiedad 2, se puede concluir que $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$.

**c.** Usando la propiedad inversa (propiedad 3), se deduce que $6^{\log_6 20} = 20$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Es posible usar la propiedad biunívoca (propiedad 4) para resolver ecuaciones logarítmicas sencillas, como se muestra en el Ejemplo 4.

### Ejemplo 4 Usar la propiedad biunívoca

**a.** $\log_3 x = \log_3 12$ Ecuación original

$x = 12$ Propiedad biunívoca

**b.** $\log(2x + 1) = \log 3x \implies 2x + 1 = 3x \implies 1 = x$

**c.** $\log_4(x^2 - 6) = \log_4 10 \implies x^2 - 6 = 10 \implies x^2 = 16 \implies x = \pm 4$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 85.

## Gráficas de funciones logarítmicas

Para trazar la gráfica de $y = \log_a x$, se puede usar el hecho de que las gráficas de funciones inversas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

### Ejemplo 5 Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

En el mismo plano de coordenadas, trace la gráfica de cada función.

**a.** $f(x) = 2^x$ **b.** $g(x) = \log_2 x$

### Solución

**a.** Para $f(x) = 2^x$, construya una tabla de valores. Al determinar estos puntos y enlazarlos con una curva lisa, se obtiene la gráfica que se muestra en la Figura 3.14.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2^x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ | $8$ |

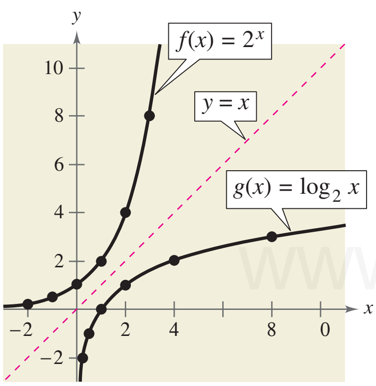



FIGURA 3.14

**b.** Como $g(x) = \log_2 x$ es la función inversa de $f(x) = 2^x$, la gráfica de $g$ se obtiene al localizar los puntos $(f(x), x)$ y enlazarlos con una curva lisa. La gráfica de $g$ es una reflexión de la gráfica de $f$ en la recta $y = x$, como se ve en la Figura 3.14.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

### Ejemplo 6 Trazar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de la función logarítmica común $f(x) = \log x$. Identifique la asíntota vertical.

### Solución

Empiece por construir una tabla de valores. Observe que algunos de ellos se pueden obtener sin calculadora si se usa la propiedad inversa de los logaritmos. Otros requieren calculadora. A continuación, determine los puntos y enlácelos con una curva lisa, como se ve en la Figura 3.15. La asíntota vertical es $x = 0$ (eje $y$).

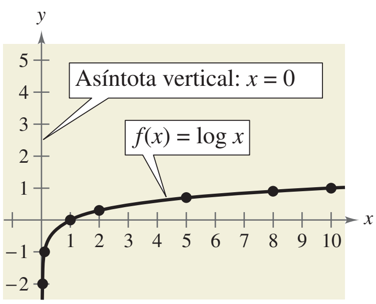



FIGURA 3.15

| | Sin calculadora | | | | Con calculadora | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{10}$ | $1$ | $10$ | $2$ | $5$ | $8$ |
| $f(x) = \log x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0.301$ | $0.699$ | $0.903$ |

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43

La naturaleza de la gráfica de la Figura 3.15 es típica de funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, $a > 1$. Tienen una intersección con el eje $x$ y una asíntota vertical. Observe la lentitud con la que la gráfica sube para $x > 1$. Las características básicas de las gráficas logarítmicas se resumen en la Figura 3.16.

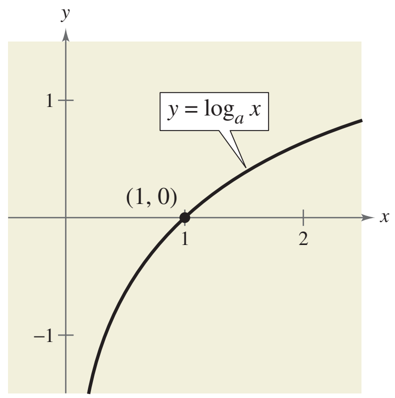



FIGURA 3.16

*Gráfica de* $y = \log_a x$, $a > 1$

- Dominio: $(0, \infty)$
- Rango: $(-\infty, \infty)$
- Intersección con el eje $x$: $(1, 0)$
- Creciente
- Biunívoca; por tanto, tiene una función inversa
- El eje $y$ es una asíntota vertical ($\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$).
- Continua
- Reflexión de la gráfica de $y = a^x$ alrededor de la recta $y = x$

Las características básicas de la gráfica de $f(x) = a^x$ se muestran a continuación para ilustrar la relación inversa entre $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$.

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección con el eje $y$: $(0, 1)$
- Eje $x$ es una asíntota horizontal ($a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$).



En el siguiente ejemplo, la gráfica de $y = \log_a x$ se usa para trazar las gráficas de funciones de la forma $f(x) = b \pm \log_a(x + c)$. Nótese la forma en que el desplazamiento horizontal de la gráfica resulta en un desplazamiento horizontal de la asíntota vertical.

**Tip de estudio**

Usted puede usar sus conocimientos de transformaciones para identificar asíntotas verticales de funciones logarítmicas. Por ejemplo, en el Ejemplo 7(a), la gráfica de $g(x) = f(x - 1)$ desplaza la gráfica de $f(x)$ una unidad a la derecha. Por tanto, la asíntota vertical de $g(x)$ es $x = 1$, una unidad a la derecha de la asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.

### Ejemplo 7 Desplazamiento de gráficas de funciones logarítmicas

La gráfica de cada una de las funciones es similar a la gráfica de $f(x) = \log x$.

**a.** Como $g(x) = \log(x - 1) = f(x - 1)$, la gráfica de $g$ se puede obtener al desplazar la gráfica de $f$ una unidad a la derecha, como se ilustra en la Figura 3.17.

**b.** Como $h(x) = 2 + \log x = 2 + f(x)$, la gráfica de $h$ se puede obtener al desplazar la gráfica de $f$ dos unidades hacia arriba, como se ilustra en la Figura 3.18.

**Ayuda de álgebra**

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas de desplazamiento, reflexión y alargamiento de gráficas.

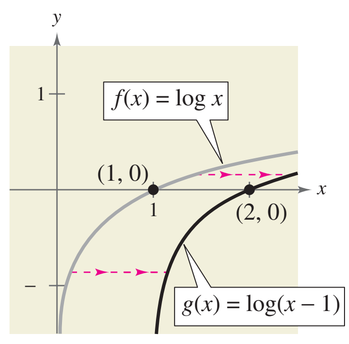



FIGURA 3.17

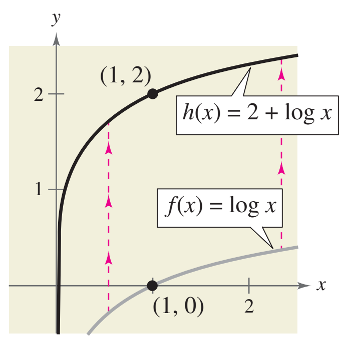



FIGURA 3.18

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45

## Función logaritmo natural

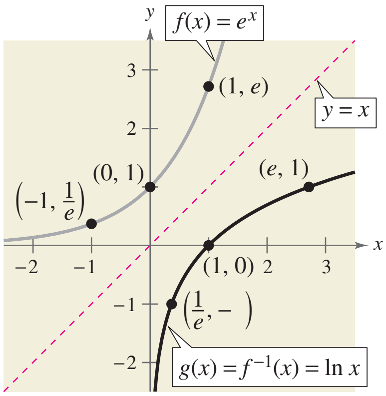
Si vemos de nuevo la gráfica de la función exponencial natural introducida en la página 230, en la Sección 3.1, veremos que $f(x) = e^x$ es biunívoca y, por tanto, tiene una función inversa. Esta función inversa se denomina **función logaritmo natural** y está denotada por el símbolo especial $\ln x$, que se lee como “el log natural de $x$” o “ele ene de $x$.” Observe que el logaritmo natural se escribe sin base; se entiende que la base es $e$.

### Función logaritmo natural

La función definida por

$$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$$

se llama **función logaritmo natural.**




Reflexión de la gráfica de $f(x) = e^x$ alrededor de la recta $y = x$

FIGURA 3.19

La definición citada líneas antes implica que la función logaritmo natural y la función exponencial natural son inversas una de la otra. Por tanto, toda ecuación logarítmica se puede escribir en una forma exponencial equivalente, y toda ecuación exponencial se puede escribir en forma logarítmica. Esto es, $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son ecuaciones equivalentes.

Como las funciones dadas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son funciones inversas una de la otra, sus gráficas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$. Esta propiedad reflexiva está ilustrada en la Figura 3.19.

En casi todas las calculadoras, el logaritmo natural está denotado por LN, como se ilustra en el Ejemplo 8.



### Ejemplo 8 Evaluar la función logaritmo natural

Use una calculadora para evaluar la función dada por $f(x) = \ln x$ para cada valor de $x$.

**a.** $x = 2$

**b.** $x = 0.3$

**c.** $x = -1$

**d.** $x = 1 + \sqrt{2}$

**Solución**

| | *Valor de la función* | *Tecleo en calculadora de gráficas* | *Pantalla* |
|---|---|---|---|
| **a.** | $f(2) = \ln 2$ | LN 2 ENTER | 0.6931472 |
| **b.** | $f(0.3) = \ln 0.3$ | LN .3 ENTER | –1.2039728 |
| **c.** | $f(-1) = \ln(-1)$ | LN (−) 1 ENTER | ERROR |
| **d.** | $f(1 + \sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2})$ | LN ( 1 + √ 2 ) ENTER | 0.8813736 |

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

**ATENCIÓN**

Observe que como cada función logarítmica, el dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los números reales positivos; asegúrese de ver que $\ln x$ no está definido para cero o para números negativos.

En el Ejemplo 8, asegúrese de ver que $\ln(-1)$ da un mensaje de error en casi todas las calculadoras. (Algunas pueden exhibir un número complejo.) Esto ocurre porque el dominio de $\ln x$ es el conjunto de los números reales positivos (vea Figura 3.19). Por tanto, $\ln(-1)$ no está definido.

Las cuatro propiedades de los logaritmos citadas en la página 228 también son válidas para logaritmos naturales.

### Propiedades de los logaritmos naturales

1. $\ln 1 = 0$ porque $e^0 = 1$.
2. $\ln e = 1$ porque $e^1 = e$.
3. $\ln e^x = x$ si $e^{\ln x} = x$ — Propiedades inversas
4. Si $\ln x = \ln y$, entonces $x = y$. — Propiedad biunívoca

## Ejemplo 9 Usar las propiedades de los logaritmos naturales

Use las propiedades de los logaritmos naturales para simplificar cada expresión.

**a.** $\ln \dfrac{1}{e}$ **b.** $e^{\ln 5}$ **c.** $\dfrac{\ln 1}{3}$ **d.** $2 \ln e$

### Solución

**a.** $\ln \dfrac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$ Propiedad inversa

**b.** $e^{\ln 5} = 5$ Propiedad inversa

**c.** $\dfrac{\ln 1}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$ Propiedad 1

**d.** $2 \ln e = 2(1) = 2$ Propiedad 2

**PUNTO *de repaso*** Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

## Ejemplo 10 Hallar el dominio de funciones logarítmicas



Halle el dominio de cada función.

**a.** $f(x) = \ln(x - 2)$ **b.** $g(x) = \ln(2 - x)$ **c.** $h(x) = \ln x^2$

### Solución

**a.** Como $\ln(x - 2)$ está definido sólo si $x - 2 > 0$, se deduce que el dominio de $f$ es $(2, \infty)$. La gráfica de $f$ se muestra en la Figura 3.20.

**b.** Como $\ln(2 - x)$ está definido sólo si $2 - x > 0$, se deduce que el dominio de $g$ es $(-\infty, 2)$. La gráfica de $g$ se muestra en la Figura 3.21

**c.** Como $\ln x^2$ está definido sólo si $x^2 > 0$, se deduce que el dominio de $h$ es todos los números reales excepto $x = 0$. La gráfica de $h$ se muestra en la Figura 3.22.

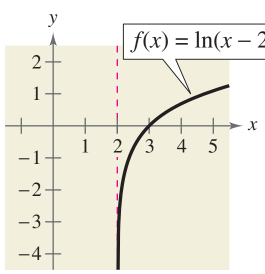



FIGURA 3.20

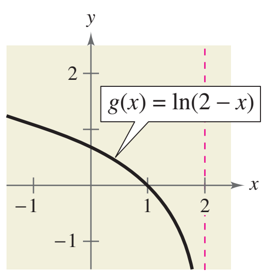



FIGURA 3.21

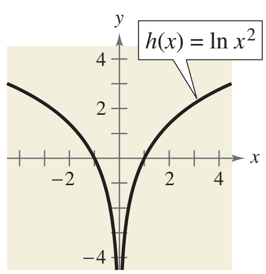



FIGURA 3.22

**PUNTO *de repaso*** Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

## Aplicación

### Ejemplo 11 Modelo de la memoria humana

Los estudiantes que participan en un experimento de sicología asistieron a varias conferencias sobre un tema y se les dio un examen. Cada mes, durante un año después del examen, los estudiantes fueron sometidos al examen nuevamente para ver cuánto recordaban del material. El promedio de calificaciones para el grupo está dado por el modelo de memoria humana $f(t) = 75 - 6\ln(t + 1)$, $0 \le t \le 12$, donde $t$ es el tiempo en meses.

**a.** ¿Cuál fue el promedio de calificaciones en el examen original ($t = 0$)?

**b.** ¿Cuál fue el promedio de calificaciones al término de $t = 2$ meses?

**c.** ¿Cuál fue el promedio de calificaciones al término de $t = 6$ meses?

#### Solución algebraica

**a.** El promedio de calificaciones original fue

$$\begin{aligned} f(0) &= 75 - 6\ln(0+1) && \text{Sustituir 0 por } t. \\ &= 75 - 6\ln 1 && \text{Simplificar.} \\ &= 75 - 6(0) && \text{Propiedad de logaritmos naturales} \\ &= 75. && \text{Solución} \end{aligned}$$

**b.** Después de 2 meses el promedio fue

$$\begin{aligned} f(2) &= 75 - 6\ln(2+1) && \text{Sustituir 2 por } t. \\ &= 75 - 6\ln 3 && \text{Simplificar.} \\ &\approx 75 - 6(1.0986) && \text{Usar calculadora.} \\ &\approx 68.4. && \text{Solución} \end{aligned}$$

**c.** Tras 6 meses el promedio fue

$$\begin{aligned} f(6) &= 75 - 6\ln(6+1) && \text{Sustituir 6 por } t. \\ &= 75 - 6\ln 7 && \text{Simplificar.} \\ &\approx 75 - 6(1.9459) && \text{Usar calculadora.} \\ &\approx 63.3. && \text{Solución} \end{aligned}$$

**PUNTO *de repaso*** Ahora trate de hacer el Ejercicio 97.

#### Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo $y = 75 - 6\ln(x + 1)$. A continuación use el comando *value* o *trace* para aproximar lo siguiente.

**a.** Cuando $x = 0$, $y = 75$ (vea Figura 3.23). Por tanto, el promedio de calificaciones original fue 75.

**b.** Cuando $x = 2$, $y \approx 68.4$ (vea Figura 3.24). Por tanto, el promedio de calificaciones después de 2 meses fue de unos 68.4, aproximadamente.

**c.** Cuando $x = 6$, $y \approx 63.3$ (vea Figura 3.25). Por tanto, el promedio de calificaciones después de 6 meses fue de alrededor de 63.3.

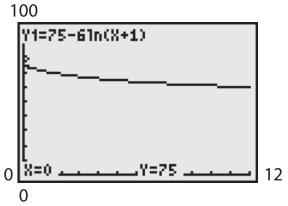



FIGURA 3.23

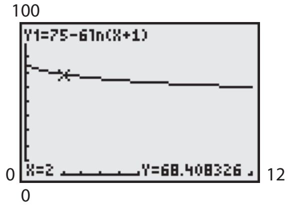



FIGURA 3.24

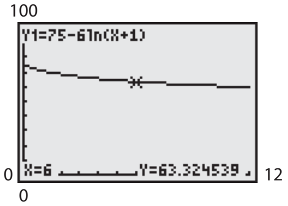



FIGURA 3.25

### Discusión en clase

**Análisis de un modelo de memoria humana** Use una calculadora de gráficas para determinar el tiempo en meses cuando el promedio de calificaciones del Ejemplo 11 fue 60. Explique su método para resolver el problema. Describa otra forma en que se pueda usar una calculadora de gráficas para determinar la respuesta.

## 3.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

**VOCABULARIO:** Llene los espacios en blanco.

1. La función inversa de la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ se llama función _______ con base $a$.
2. La función logarítmica común tiene base _______.
3. La función logarítmica dada por $f(x) = \ln x$ se denomina función logarítmica _______ y tiene base ______.
4. Las propiedades inversas de los logaritmos y exponenciales expresan que $\log_a a^x = x$ y ________.
5. La propiedad biunívoca de los logaritmos naturales expresa que si $\ln x = \ln y$, entonces ___________.
6. El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los _________ ________ ________.

### HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-14, escriba la ecuación logarítmica en forma exponencial. Por ejemplo, la forma exponencial de $\log_5 25 = 2$ es $5^2 = 25$.

7. $\log_4 16 = 2$
8. $\log_7 343 = 3$
9. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$
10. $\log \frac{1}{1000} = -3$
11. $\log_{32} 4 = \frac{2}{5}$
12. $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$
13. $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$
14. $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

En los Ejercicios 15-22, escriba la ecuación exponencial en forma logarítmica. Por ejemplo, la forma logarítmica de $2^3 = 8$ es $\log_2 8 = 3$.

15. $5^3 = 125$
16. $13^2 = 169$
17. $81^{1/4} = 3$
18. $9^{3/2} = 27$
19. $6^{-2} = \frac{1}{36}$
20. $4^{-3} = \frac{1}{64}$
21. $24^0 = 1$
22. $10^{-3} = 0.001$

En los Ejercicios 23-28, evalúe la función en el valor indicado de $x$ sin usar calculadora.

| | *Función* | *Valor* |
|---|---|---|
| 23. | $f(x) = \log_2 x$ | $x = 64$ |
| 24. | $f(x) = \log_{25} x$ | $x = 5$ |
| 25. | $f(x) = \log_8 x$ | $x = 1$ |
| 26. | $f(x) = \log x$ | $x = 10$ |
| 27. | $g(x) = \log_a x$ | $x = a^2$ |
| 28. | $g(x) = \log_b x$ | $x = b^{-3}$ |

En los Ejercicios 29-32, use una calculadora para evaluar $f(x) = \log x$ en el valor de $x$ indicado. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

29. $x = \frac{7}{8}$
30. $x = \frac{1}{500}$
31. $x = 12.5$
32. $x = 96.75$

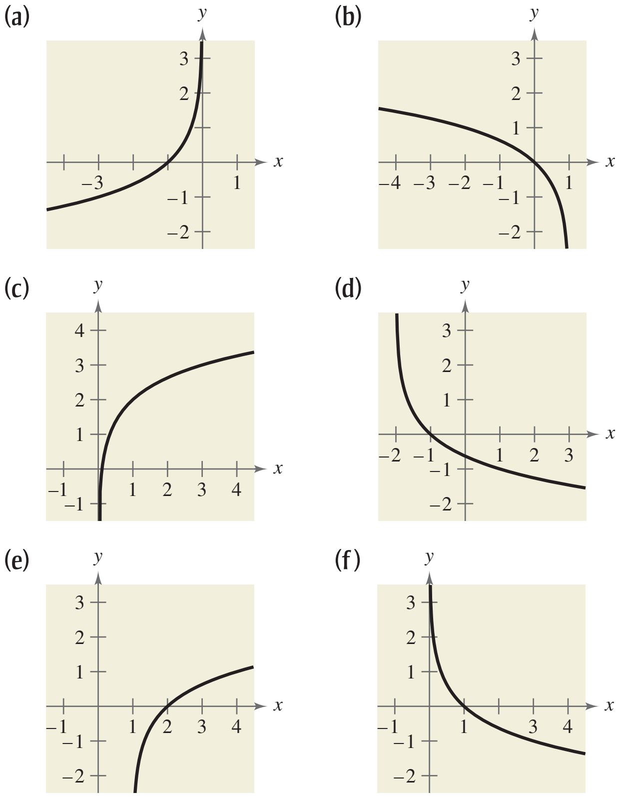
En los Ejercicios 33-36, use las propiedades de los logaritmos para simplificar la expresión.

33. $\log_{11} 11^7$
34. $\log_{3.2} 1$
35. $\log_\pi \pi$
36. $9^{\log_9 15}$

En los Ejercicios 37-44, encuentre el dominio, la intersección con el eje $x$ y la asíntota vertical de la función logarítmica y trace su gráfica.

37. $f(x) = \log_4 x$
38. $g(x) = \log_6 x$
39. $y = -\log_3 x + 2$
40. $h(x) = \log_4(x - 3)$
41. $f(x) = -\log_6(x + 2)$
42. $y = \log_5(x - 1) + 4$
43. $y = \log\left(\dfrac{x}{7}\right)$
44. $y = \log(-x)$

En los Ejercicios 45-50, use la gráfica de $g(x) = \log_3 x$ para relacionar la función dada con su gráfica. A continuación describa la relación entre las gráficas de $f$ y $g$. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c),(d),(e) y (f).].



**45.** $f(x) = \log_3 x + 2$

**46.** $f(x) = -\log_3 x$

**47.** $f(x) = -\log_3(x + 2)$

**48.** $f(x) = \log_3(x - 1)$

**49.** $f(x) = \log_3(1 - x)$

**50.** $f(x) = -\log_3(-x)$

En los Ejercicios 51-58, escriba la ecuación logarítmica en forma exponencial.

**51.** $\ln \frac{1}{2} = -0.693 \ldots$

**52.** $\ln \frac{2}{5} = -0.916 \ldots$

**53.** $\ln 7 = 1.945 \ldots$

**54.** $\ln 10 = 2.302 \ldots$

**55.** $\ln 250 = 5.521 \ldots$

**56.** $\ln 1084 = 6.988 \ldots$

**57.** $\ln 1 = 0$

**58.** $\ln e = 1$

En los Ejercicios 59-66, escriba la ecuación exponencial en forma logarítmica.

**59.** $e^4 = 54.598 \ldots$

**60.** $e^2 = 7.3890 \ldots$

**61.** $e^{1/2} = 1.6487 \ldots$

**62.** $e^{1/3} = 1.3956 \ldots$

**63.** $e^{-0.9} = 0.406 \ldots$

**64.** $e^{-4.1} = 0.0165 \ldots$

**65.** $e^x = 4$

**66.** $e^{2x} = 3$

En los Ejercicios 67-70, use una calculadora para evaluar la función en el valor de $x$ indicado. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

| | *Función* | *Valor* |
|---|---|---|
| **67.** | $f(x) = \ln x$ | $x = 18.42$ |
| **68.** | $f(x) = 3 \ln x$ | $x = 0.74$ |
| **69.** | $g(x) = 8 \ln x$ | $x = 0.05$ |
| **70.** | $g(x) = -\ln x$ | $x = \frac{1}{2}$ |

En los Ejercicios 71-74, evalúe $g(x) = \ln x$ en el valor de $x$ indicado sin usar calculadora.

**71.** $x = e^5$

**72.** $x = e^{-4}$

**73.** $x = e^{-5/6}$

**74.** $x = e^{-5/2}$

En los Ejercicios 75-78, encuentre el dominio, la intersección con el eje $x$ y la asíntota vertical de la función logarítmica y trace su gráfica.

**75.** $f(x) = \ln(x - 4)$

**76.** $h(x) = \ln(x + 5)$

**77.** $g(x) = \ln(-x)$

**78.** $f(x) = \ln(3 - x)$

En los Ejercicios 79-84, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Asegúrese de usar una pantalla apropiada.

**79.** $f(x) = \log(x + 9)$

**80.** $f(x) = \log(x - 6)$

**81.** $f(x) = \ln(x - 1)$

**82.** $f(x) = \ln(x + 2)$

**83.** $f(x) = \ln x + 8$

**84.** $f(x) = 3 \ln x - 1$

En los Ejercicios 85-92, use la propiedad biunívoca para despejar $x$ de la ecuación.

**85.** $\log_5(x + 1) = \log_5 6$

**86.** $\log_2(x - 3) = \log_2 9$

**87.** $\log(2x + 1) = \log 15$

**88.** $\log(5x + 3) = \log 12$

**89.** $\ln(x + 4) = \ln 12$

**90.** $\ln(x - 7) = \ln 7$

**91.** $\ln(x^2 - 2) = \ln 23$

**92.** $\ln(x^2 - x) = \ln 6$

**93. PAGO MENSUAL** El modelo

$$t = 16.625 \ln\left(\frac{x}{x - 750}\right), \quad x > 750$$

aproxima la duración de una hipoteca para viviendas de \$150 000 a 6% en términos de pago mensual. En el modelo, $t$ es la duración de la hipoteca en años y $x$ el pago mensual en dólares.

(a) Use el modelo para aproximar las duraciones de una hipoteca de \$150 000 a 6% cuando el pago mensual es de \$897.72 y cuando es de \$1659.24.

(b) Aproxime las cantidades totales pagadas en el plazo de la hipoteca con un pago mensual de \$897.72 y con uno de \$1659.24.

(c) Aproxime los cargos totales por intereses para un pago mensual de \$897.72 y para uno de \$1659.24.

(d) ¿Cuál es la asíntota vertical para el modelo? Interprete su significado en el contexto del problema.

**94. INTERÉS COMPUESTO** Un capital inicial $P$, invertido al $5\frac{1}{2}\%$ y capitalizado continuamente aumenta a una cantidad $K$ veces el capital inicial original después de $t$ años, donde $t$ está dado por $t = (\ln K)/0.055$.

(a) Complete la tabla e interprete sus resultados.

| $K$ | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | | | | | | | |

(b) Trace una gráfica de la función.

**95. TELEVISIÓN POR CABLE** El número de sistemas $C$ de televisión por cable (en miles) en cierto país, de 2001 a 2006, puede aproximarse con el modelo

$$C = 10.355 - 0.298t \ln t, \quad 1 \leq t \leq 6$$

donde $t$ representa el año, con $t = 1$ correspondiente a 2001. (Fuente: Warren Communication News)

(a) Complete la tabla.

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | | | | | | |

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(c) ¿El modelo puede usarse para predecir los números de sistemas de televisión por cable después de 2006? Explique.

**96. POBLACIÓN** El tiempo $t$ en años para que la población mundial se duplique, si es creciente a un ritmo $r$ continuo, está dado por $t = (\ln 2)/r$.

(a) Complete la tabla e interprete sus resultados.

| $r$ | 0.005 | 0.010 | 0.015 | 0.020 | 0.025 | 0.030 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | | | | | | |

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

**97. MODELO DE MEMORIA HUMANA** A unos estudiantes de matemáticas se les aplicó un examen y, a continuación, cada mes se les aplicó otro examen equivalente. El promedio de calificaciones para el grupo está dado por el modelo de memoria humana $f(t) = 80 - 17\log(t + 1)$, $0 \leq t \leq 12$, donde $t$ es el tiempo en meses.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo en el dominio especificado.

(b) ¿Cuál fue el promedio de calificaciones en el examen original $(t = 0)$?

(c) ¿Cuál fue el promedio de calificaciones después de 4 meses?

(d) ¿Cuál fue el promedio de calificaciones después de 10 meses?

**98. INTENSIDAD DEL SONIDO** La relación entre el número de decibeles $\beta$ y la intensidad $I$ de un sonido, en watts por metro cuadrado, es

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

(a) Determine el número de decibeles de un sonido con una intensidad de 1 watt por metro cuadrado.

(b) Determine el número de decibeles de un sonido con una intensidad de $10^{-2}$ watts por metro cuadrado.

(c) La intensidad del sonido en el inciso (a) es 100 veces más que el del inciso (b). ¿El número de decibeles es 100 veces mayor? Explique.

## EXPLORACIÓN

**¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 99 y 100, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

**99.** Puede determinar la gráfica de $f(x) = \log_6 x$ al graficar $g(x) = 6^x$ y reflejarla alrededor del eje $x$.

**100.** La gráfica de $f(x) = \log_3 x$ contiene el punto (27, 3).

**En los Ejercicios 101-104, trace las gráficas de $f$ y $g$ y describa la relación entre ellas. ¿Cuál es la relación entre las funciones $f$ y $g$?**

**101.** $f(x) = 3^x, \quad g(x) = \log_3 x$

**102.** $f(x) = 5^x, \quad g(x) = \log_5 x$

**103.** $f(x) = e^x, \quad g(x) = \ln x$

**104.** $f(x) = 8^x, \quad g(x) = \log_8 x$

**105. PIÉNSELO** Complete la tabla para $f(x) = 10^x$.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

Complete la tabla para $f(x) = \log x$.

| $x$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 | 10 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

Compare las dos tablas. ¿Cuál es la relación entre $f(x) = 10^x$ y $f(x) = \log x$?

**106. ANÁLISIS GRÁFICO** Use una calculadora de gráficas para graficar $f$ y $g$ en la misma pantalla y determine cuál crece a un ritmo mayor cuando $x$ se aproxima a $+\infty$. ¿Qué puede concluir acerca del ritmo de crecimiento de la función logarítmica natural?

(a) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt[4]{x}$

**107.** (a) Complete la tabla para la función dada por $f(x) = (\ln x)/x$.

| $x$ | 1 | 5 | 10 | $10^2$ | $10^4$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

(b) Use la tabla del inciso (a) para determinar qué valor de $f(x)$ se aproxima cuando $x$ aumenta sin límite.

(c) Use una calculadora de gráficas para confirmar el resultado del inciso (b).

**108. TOQUE FINAL** La tabla de valores se obtuvo al evaluar una función. Determine cuál de los enunciados puede ser verdadero y cuál debe ser falso.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 8 | 3 |

(a) $y$ es una función exponencial de $x$.

(b) $y$ es una función logarítmica de $x$.

(c) $x$ es una función exponencial de $y$.

(d) $y$ es una función lineal de $x$.

**109. ESCRITURA** Explique por qué $\log_a x$ está definido sólo para $0 < a < 1$ y $a > 1$.

**En los Ejercicios 110 y 111, (a) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (b) use la gráfica para determinar los intervalos en los que la función es creciente y decreciente y (c) aproxime cualesquier valores relativos máximo o mínimo de la función.**

**110.** $f(x) = |\ln x|$

**111.** $h(x) = \ln(x^2 + 1)$