9.7 PROBABILIDAD

Lo que debe aprender

- Encontrar las probabilidades de eventos.
- Encontrar las probabilidades de eventos mutuamente excluyentes.
- Encontrar las probabilidades de eventos independientes.
- Encontrar la probabilidad del complemento de un evento.

Por qué debe aprenderlo

La probabilidad se aplica a numerosos juegos de azar. Por ejemplo, en el Ejercicio 67 en la página 710 usted calculará probabilidades que se relacionan con el juego de ruleta.

La probabilidad de un evento

Cualquier suceso para el cual el resultado es incierto se llama **experimento**. Los posibles productos del experimento son **resultados**, el conjunto de todos los posibles resultados del experimento es el **espacio muestral** de éste y cualquier subconjunto de un espacio muestral es un **evento**.

Por ejemplo, cuando se lanza al aire un dado de seis caras, el espacio muestral puede estar representado por los números 1 a 6. Para este experimento, cada uno de los resultados es *igualmente probable*.

Para describir espacios muestrales en forma tal que cada resultado sea igualmente probable, a veces se debe distinguir entre dos o varios resultados en formas que parecen artificiales. El Ejemplo 1 ilustra esa situación.

Ejemplo 1 Hallar un espacio muestral

Encuentre el espacio muestral para cada uno de lo siguiente.

a. Una moneda se lanza al aire.

b. Dos monedas se lanzan al aire.

c. Tres monedas se lanzan al aire.

Solución

a. Como la moneda caerá ya sea con la "cara" hacia arriba (denotada por H) o "cruz" (denotada por T), el espacio muestral es

$$S = \{H, T\}.$$

b. Como cualquiera de las dos monedas puede caer con cara hacia arriba o cruz hacia arriba, los posibles resultados son como sigue.

$HH =$ cara hacia arriba en ambas monedas

$HT =$ cara hacia arriba en la primera moneda y cruz en la segunda

$TH =$ cruz hacia arriba en la primera moneda y cara en la segunda

$TT =$ cruz hacia arriba en ambas monedas

Por tanto, el espacio muestral es

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

Nótese que esta lista distingue entre los dos casos de HT y TH, aun cuando estos dos resultados parezcan similares.

c. Siguiendo la notación del inciso (b), el espacio muestral es

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

Observe que esta lista distingue entre los casos HHT, HTH y THH, y entre los casos HTT, THT y TTH.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Para calcular la probabilidad de un evento, cuente el número de resultados del evento y del espacio muestral. El *número de resultados* del evento E se denota con $n(E)$, y el número de resultados del espacio muestral S se denota con $n(S)$. La probabilidad de que el evento E ocurra se da con $\frac{n(E)}{n(S)}$.

La probabilidad de un evento

Si un evento E tiene $n(E)$ resultados igualmente probables y su espacio muestral S tiene $n(S)$ resultados igualmente probables, la probabilidad del evento E es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

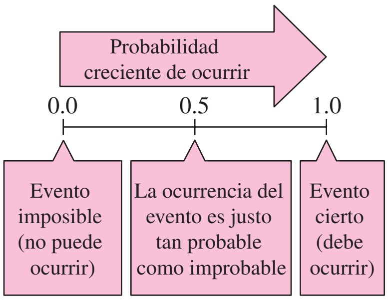


FIGURA 9.8

Como el número de resultados en un evento debe ser menor o igual al número de resultados del espacio muestral, la probabilidad de un evento debe ser un número entre 0 y 1. Esto es

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

como se indica en la Figura 9.8. Si $P(E) = 0$, el evento E *no puede ocurrir*, y E se llama **evento imposible.** Si $P(E) = 1$, el evento E *debe ocurrir* y E se llama **evento seguro**.

Ejemplo 2 Hallar la probabilidad de un evento

a. Dos monedas son lanzadas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas queden cara arriba?

b. Un naipe se saca de un mazo normal de cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un as?

Solución

a. Siguiendo el procedimiento del ejemplo 1(b), sean

$$E = \{HH\}$$

y

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

La probabilidad de obtener dos caras es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}.$$

b. Como hay 52 cartas en un mazo normal de naipes y hay cuatro ases (uno en cada palo), la probabilidad de sacar un as es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$= \frac{4}{52}$$

$$= \frac{1}{13}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

Tip de estudio

Se puede escribir una probabilidad como fracción, decimal o porcentaje. Por citar un caso, en el Ejemplo 2(a) la probabilidad de obtener dos caras se puede escribir como $\frac{1}{4}$, 0.25 o 25%.

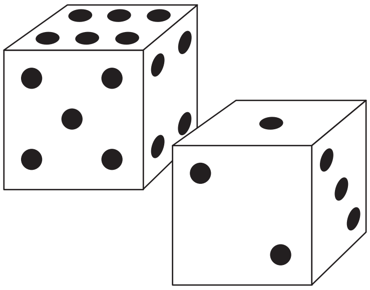


FIGURA 9.9

Ejemplo 3 Hallar la probabilidad de un evento

Dos dados de seis lados se tiran. ¿Cuál es la probabilidad de que el total de los dos dados sea 7? (Vea Figura 9.9.)

Solución

Como hay seis resultados posibles en cada dado, se puede usar el principio fundamental de conteo para concluir que hay $6 \cdot 6$ o 36 resultados cuando se tiran dos dados. Para hallar la probabilidad de acumular un total de 7, primero se debe contar el número de formas en que esto puede ocurrir.

Primer dado	Segundo dado
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

Entonces, un total de 7 se puede formar de seis formas, lo cual significa que la probabilidad de sumar un 7 es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Tip de estudio

Podría haberse escrito cada espacio muestral del Ejemplo 2(b) y 3 y simplemente contar los resultados en los eventos deseados. Para espacios muestrales más grandes, no obstante, deben usarse los principios de conteo expuestos en la sección 9.6.

Ejemplo 4 Hallar la probabilidad de un evento

Los dados de doce lados, como se muestra en la figura 9.10, pueden construirse (en forma de un dodecaedro regular) de manera que cada uno de los números del 1 al 6 aparezca dos veces en cada dado. Demuestre que estos dados se pueden usar en cualquier juego que requiera de dados comunes y corrientes de seis lados sin cambiar las probabilidades de los diversos resultados.

Solución

Para un dado común y corriente de seis lados, cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se presenta sólo una vez, de modo que la probabilidad de que salga cualquier número particular es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6}.$$

Para uno de los dados de 12 lados, cada número se presenta dos veces, de modo que la probabilidad de que cualquiera salga es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

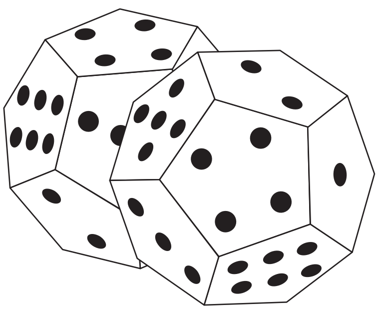


FIGURA 9.10

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Ejemplo 5 La probabilidad de ganar en una lotería

En el juego The Pick de Arizona, un jugador escoge seis números diferentes del 1 al 44. Si estos seis números son iguales a los seis números sacados (en cualquier orden) por la comisión de lotería, el jugador gana (o comparte) el premio principal. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio principal si el jugador compra un boleto?

Solución

Para hallar el número de elementos en el espacio muestral, use la fórmula para el número de combinaciones de 44 elementos tomados seis a la vez.

$$\begin{aligned} n(S) &= {}_{44}C_6 \\ &= \frac{44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 7\,059\,052 \end{aligned}$$

Si una persona compra sólo un boleto, la probabilidad de ganar es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{7\,059\,052}.$$

Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Ejemplo 6 Selección aleatoria

El número de colegios y universidades en varias regiones de Estados Unidos en 2007 se muestra en la Figura 9.11. Una institución se selecciona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en una de las tres regiones del Sur? (Fuente: National Center for Education Statistics)

Solución

En la figura se observa que el número total de colegios y universidades es 4309. Como hay 738 + 276 + 1420 colegios y universidades en las tres regiones del Sur, la probabilidad de que la institución esté en una de estas regiones es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1420}{4309} \approx 0.330.$$

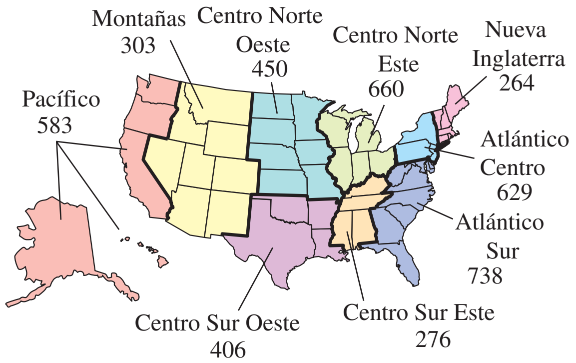


FIGURA 9.11

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B (del mismo espacio muestral) son **mutuamente excluyentes** si A y B no tienen resultados en común. En la terminología de conjuntos, la intersección de A y B es el conjunto vacío, lo cual implica que

$$P(A \cap B) = 0.$$

Por ejemplo, si se tiran dos dados, el evento A de acumular un total de 6 y el evento B de acumular un total de 9 son mutuamente excluyentes. Para hallar la probabilidad de que ocurra uno u otro de los dos eventos mutuamente excluyentes se pueden *sumar* sus probabilidades individuales.

Probabilidad de la unión de dos eventos

Si A y B son eventos del mismo espacio muestral, la probabilidad de que ocurra A o B está dada por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Ejemplo 7 La probabilidad de una unión de eventos

Se selecciona un naipe de un mazo normal de 52 cartas de juego. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea de corazones o de una figura?

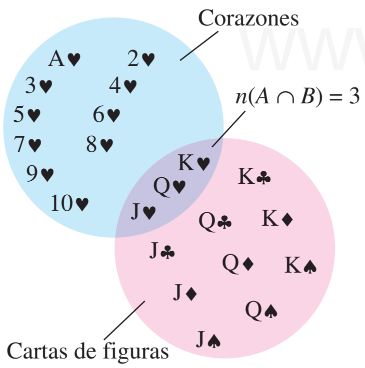


FIGURA 9.12

Solución

Como el mazo tiene 13 corazones, la probabilidad de seleccionar un corazón (evento A) es

$$P(A) = \frac{13}{52}.$$

Del mismo modo, como el mazo tiene 12 cartas de figuras, la probabilidad de seleccionar una de ellas (evento B) es

$$P(B) = \frac{12}{52}.$$

Como tres de las cartas son corazones *y además* cartas de figuras (vea Figura 9.12), se deduce que

$$P(A \cap B) = \frac{3}{52}.$$

Finalmente, aplicando la fórmula para la probabilidad de la unión de dos eventos, se puede concluir que la probabilidad de seleccionar un corazón o una carta de figuras es

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} \approx 0.423. \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

Ejemplo 8 Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

El departamento de personal de una compañía ha compilado datos sobre el número de empleados que han estado en la compañía en varios periodos. Los resultados se muestran en la tabla.

Años de servicio	Número de empleados
0–4	157
5–9	89
10–14	74
15–19	63
20–24	42
25–29	38
30–34	37
35–39	21
40–44	8

Si un empleado se escoge al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga (a) 4 o menos años de servicio y (b) 9 o menos años de servicio?

Solución

a. Para empezar, sume el número de empleados para hallar que el total es 529. A continuación, con A represente escoger un empleado con 0 a 4 años de servicio. Entonces la probabilidad de escoger un empleado que tenga 4 o menos años de servicio es

$$P(A) = \frac{157}{529} \approx 0.297.$$

b. Con el evento B represente escoger un empleado con 5 a 9 años de servicio. Entonces

$$P(B) = \frac{89}{529}\,.$$

Como el evento A de el inciso (a) y el evento B no tienen resultados en común, se puede concluir que estos dos eventos son mutuamente excluyentes y que

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{157}{529} + \frac{89}{529} \\ &= \frac{246}{529} \\ &\approx 0.465. \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de escoger un empleado que tenga 9 o menos años de servicio es alrededor de 0.465.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Eventos independientes

Dos eventos son **independientes** si el acontecer de uno de ellos no tiene efecto en el acontecer del otro. Por ejemplo, acumular un total de 12 con dos dados de seis lados no tiene efecto sobre el resultado de futuros tiros de los dados. Para hallar la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes, *multiplique* las probabilidades de cada uno.

Probabilidad de eventos independientes

Si A y B son eventos independientes, la probabilidad de que ocurran A y B es

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ejemplo 9 Probabilidad de eventos independientes

Un generador de números aleatorios en una computadora selecciona tres enteros del 1 al 20. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres números sean menores o iguales a 5?

Solución

La probabilidad de seleccionar un número del 1 al 5 es

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, la probabilidad de que los tres números sean menores o iguales a 5 es

$$P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{64}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Ejemplo 10 Probabilidad de eventos independientes

En 2009, aproximadamente 13% de la población adulta en Estados Unidos obtenía casi todas sus noticias por internet. En una encuesta, 10 personas fueron seleccionadas al azar de entre la población adulta. ¿Cuál es la probabilidad de que los 10 se enteraran de casi todas sus noticias por esa red? (Fuente: CBS News/New York Times Poll)

Solución

Con A represente un adulto que se entera de sus noticias por internet. La probabilidad de escoger un adulto que se entere de casi todas sus noticias por esa red es 0.13, la probabilidad de escoger un segundo adulto que se entere de casi todas sus noticias por internet es 0.13, y así sucesivamente. Como estos eventos son independientes, se puede concluir que la probabilidad de que las 10 personas se enteren de casi todas sus noticias por internet es

$$[P(A)]^{10} = (0.13)^{10} \approx 0.000000001.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

El complemento de un evento

El **complemento de un evento** A es el conjunto de todos los resultados del espacio muestral que *no estén* en A. El complemento del evento A se denota con A'. En virtud de que $P(A \text{ o } A') = 1$ y como A y A' son mutuamente excluyentes, se deduce que $P(A) + P(A') = 1$. Por tanto, la probabilidad de A' es

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Por ejemplo, si la probabilidad de *ganar* en cierto juego es

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

la probabilidad de perder el juego es

$$\begin{aligned} P(A') &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Probabilidad de un complemento

Sea A un evento y sea A' su complemento. Si la probabilidad de A es $P(A)$, la probabilidad del complemento es

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Ejemplo 11 Hallar la probabilidad de un complemento

Un fabricante ha determinado que una máquina promedia una unidad defectuosa por cada 1000 que produce. ¿Cuál es la probabilidad de que un pedido de 200 unidades tenga una o más unidades defectuosas?

Solución

Para resolver este problema como se indica es necesario hallar las probabilidades de tener exactamente una unidad defectuosa, exactamente dos unidades defectuosas, exactamente tres unidades defectuosas y así sucesivamente. No obstante, con el uso de complementos se puede hallar simplemente la probabilidad de que todas las unidades sean perfectas y luego se resta este valor de 1. Como la probabilidad de que cualquier unidad determinada sea perfecta es 999/1000, la probabilidad de que las 200 unidades sean perfectas es

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\frac{999}{1000}\right)^{200} \\ &\approx 0.819. \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de que al menos una unidad sea defectuosa es

$$\begin{aligned} P(A') &= 1 - P(A) \\ &\approx 1 - 0.819 \\ &= 0.181. \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

9.7 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO En los Ejercicios 1–7, llene los espacios en blanco.

1. Un ______ es un evento cuyo resultado es incierto, y los posibles productos del evento se llaman ________.
2. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento reciben el nombre de _______ _________.
3. Para determinar la _________ de un evento, se puede usar la fórmula $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$, donde $n(E)$ es el número de resultados en el evento y $n(S)$ es el número de resultados en el espacio muestral.
4. Si $P(E) = 0$, entonces E es un evento _______, y si $P(E) = 1$, entonces E es un evento _______.
5. Si dos eventos del mismo espacio muestral no tienen resultados en común, entonces los dos eventos son ________ __________.
6. Si el acontecer de un evento no tiene efecto sobre el acontecer de un segundo evento, entonces los eventos son _______ ________.
7. El _______ de un evento A es el conjunto de todos los resultados en el espacio muestral que no estén en A.
8. Relacione la fórmula de probabilidad con el nombre correcto de probabilidad.

(a) Probabilidad de unión de dos eventos	(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(b) Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes	(ii) $P(A') = 1 - P(A)$
(c) Probabilidad de eventos independientes	(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(d) Probabilidad de un complemento	(iv) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-14, determine el espacio muestral para el experimento.

9. Una moneda y un dado de seis lados se tiran al aire.
10. Un dado de seis lados se lanza dos veces al aire y se registra la suma de los resultados.
11. Un probador de sabores tiene que clasificar tres variedades de yogur, A, B y C, según preferencia.
12. Dos canicas se seleccionan (sin reemplazo) de una bolsa que contiene dos canicas rojas, dos azules y una amarilla. El color de cada una de las canicas se registra.
13. Dos supervisores de un condado son seleccionados de entre cinco supervisores, A, B, C, D y E para estudiar un plan de reciclaje.
14. Un representante de ventas hace presentaciones acerca de un producto en tres casas por día. En cada casa puede haber una venta (denotada por S) o puede no haber una venta (denotada por F).

LANZAR AL AIRE UNA MONEDA En los Ejercicios 15-20, encuentre la probabilidad para el experimento de lanzar tres veces al aire una moneda. Use el espacio muestral $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$.

15. La probabilidad de obtener exactamente una cruz.
16. La probabilidad de obtener exactamente dos cruces.
17. La probabilidad de obtener una cara en el primer tiro.
18. La probabilidad de obtener una cruz en el último tiro.
19. La probabilidad de obtener al menos una cara.
20. La probabilidad de obtener al menos dos caras.

SACAR UN NAIPE En los Ejercicios 21-24, encuentre la probabilidad para el experimento de seleccionar una carta de un mazo normal de 52 cartas de juego.

21. La carta es una de figuras.
22. La carta no es de figuras.
23. La carta es una figura roja.
24. La carta es un 9 o menor. (Los ases son bajos.)

TIRAR UN DADO En los Ejercicios 25-30, encuentre la probabilidad para el experimento de tirar dos veces un dado de seis lados.

25. La suma es 6.
26. La suma es al menos 8.
27. La suma es menor a 11.
28. La suma es 2, 3 o 12.
29. La suma es impar y no más de 7.
30. La suma es impar o primo.

SACAR CANICAS En los Ejercicios 31-34, encuentre la probabilidad para el experimento de sacar dos canicas (sin reemplazo) de una bolsa que contiene una canica verde, dos amarillas y tres rojas.

31. Ambas canicas son rojas.
32. Ambas canicas son amarillas.
33. Ninguna canica es amarilla.
34. Las canicas son de colores diferentes.

En los Ejercicios 35-38, nos dan la probabilidad de que un evento *ocurra*. Encuentre la probabilidad de que el evento *no ocurra*.

35. $P(E) = 0.87$ **36.** $P(E) = 0.36$

37. $P(E) = \frac{1}{4}$ **38.** $P(E) = \frac{2}{3}$

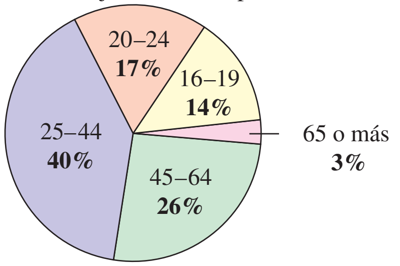
En los Ejercicios 39-42, nos dan la probabilidad de que un evento *no ocurra*. Encuentre la probabilidad de que el evento *ocurra*.

39. $P(E') = 0.23$ **40.** $P(E') = 0.92$

41. $P(E') = \frac{17}{35}$ **42.** $P(E') = \frac{61}{100}$

43. RAZONAMIENTO GRÁFICO En 2008, había aproximadamente 8.92 millones de trabajadores desempleados en Estados Unidos. La gráfica circular muestra el perfil de edades de estos trabajadores. (Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)

Edades de trabajadores desempleados



(a) Estime el número de trabajadores desempleados en el grupo de edades de 16 a 19 años.

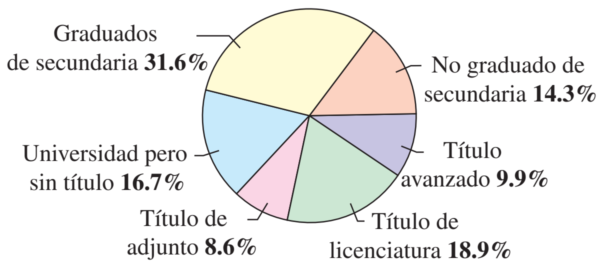
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de la población de trabajadores desempleados esté en el grupo de edades de 25 a 44 años?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de la población de trabajadores desempleados esté en el grupo de edades de 45 a 64 años?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de la población de trabajadores desempleados tenga 45 años o más?

44. RAZONAMIENTO GRÁFICO En 2007, los logros educativos de la población de 25 años o más en Estados Unidos se muestran en la gráfica circular siguiente. Use el hecho de que la población de personas de 25 años o más era de aproximadamente 194.32 millones en 2007. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Logros educativos



(a) Estime el número de personas de 25 años o más que tienen diplomas de secundaria.

(b) Estime el número de personas de 25 años o más que tienen título avanzado.

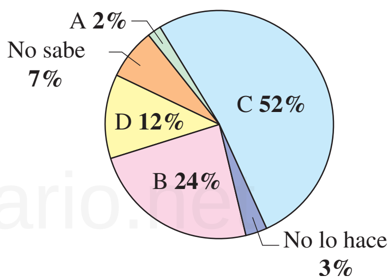
(c) Encuentre la probabilidad de que una persona de 25 años o más seleccionada al azar haya obtenido título de licenciatura o superior.

(d) Encuentre la probabilidad de que una persona de 25 años o más seleccionada al azar haya obtenido el diploma de secundaria o haya continuado en educación posterior a secundaria.

(e) Encuentre la probabilidad de que una persona de 25 años o más seleccionada al azar haya obtenido título de adjunto o superior.

45. RAZONAMIENTO GRÁFICO La figura siguiente muestra los resultados de un estudio reciente en el que se pidió a 1011 adultos calificaran escuelas públicas de Estados Unidos. (Fuente: Phi Delta Kappa/Gallup Poll)

Calificación de escuelas



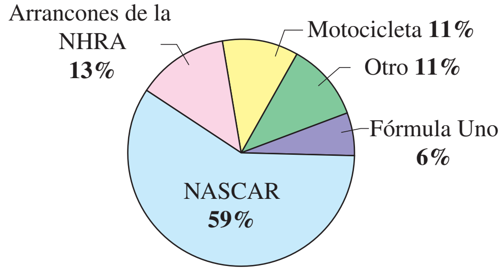
(a) Estime el número de adultos que dieron a escuelas públicas de Estados Unidos una B.

(b) Un adulto se selecciona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que dé a escuelas públicas de Estados Unidos una A?

(c) Un adulto se selecciona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que dé a escuelas públicas de Estados Unidos una C o una D?

46. RAZONAMIENTO GRÁFICO La figura siguiente muestra los resultados de una encuesta en la que aficionados a carreras de autos clasificaron su tipo favorito de carrera. (Fuente: ESPN Sports Poll/TNS Sports)

Tipo favorito de carrera



(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un aficionado a carreras de autos, seleccionado al azar, diga que la de la NASCAR es su tipo favorito de carreras?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un aficionado a carreras de autos, seleccionado al azar, diga que la de Fórmula Uno o de motocicletas es su tipo favorito de carreras?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un aficionado a carreras de autos, seleccionado al azar, *no* diga que la de arrancones de la NHRA es su tipo favorito de carreras?

47. ANÁLISIS DE DATOS Se realizó un estudio de la eficacia de una vacuna contra la gripe con una muestra de 500 personas. A algunos participantes en el estudio no se les administró vacuna, a otros se les aplicó una inyección y, a otros, dos inyecciones. Los resultados del estudio se indican en la tabla.

	Sin vacuna	Una inyección	Dos inyecciones	Total
Con gripe	7	2	13	22
Sin gripe	149	52	277	478
Total	156	54	290	500

Se seleccionó una persona al azar de la muestra. Encuentre la probabilidad especificada.

(a) La persona recibió dos inyecciones.

(b) La persona no tenía gripe.

(c) La persona tenía gripe y se le aplicó una inyección.

48. ANÁLISIS DE DATOS Cien estudiantes universitarios fueron entrevistados para determinar sus afiliaciones a un partido político y si estaban a favor de una enmienda de presupuesto equilibrado a la constitución. Los resultados del estudio se dan en la tabla siguiente, donde D representa demócrata y R republicano.

	Favor	No a favor	Inseguro	Total
D	23	25	7	55
R	32	9	4	45
Total	55	34	11	100

Se selecciona una persona al azar de la muestra. Encuentre la probabilidad de que se seleccione.

(a) Una persona que no esté a favor de la enmienda

(b) Un republicano

(c) Un demócrata que esté a favor de la enmienda

49. ASOCIACIÓN DE ALUMNOS Un colegio envía un estudio a miembros seleccionados de la clase 2009. De las 1254 personas que se graduaron ese año, 672 son mujeres, de las cuales 124 continuaron estudios en una escuela de graduados. De los 582 hombres graduados, 198 continuaron en escuela de graduados. Un miembro de alumnos se selecciona al azar. ¿Cuáles son las probabilidades de que la persona sea (a) mujer, (b) hombre y (c) mujer y no asistió a escuela de graduados?

50. EDUCACIÓN En un grupo de 128 estudiantes que se gradúa, 52 están en el cuadro de honor. De éstos, 48 continuarán en el colegio; de los otros 76 estudiantes, 56 continuarán en el colegio. De entre el grupo, se selecciona un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada (a) vaya al colegio, (b) no vaya al colegio y (c) no vaya al colegio y no esté en el cuadro de honor?

51. GANAR UNA ELECCIÓN Tres personas han sido nominadas para presidente de un grupo. De una encuesta, se estima que el primer candidato tiene un 37% de probabilidad de ganar y el segundo un 44% de probabilidad de ganar. ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer candidato gane?

52. ERROR EN NÓMINA Los empleados de una compañía trabajan en seis departamentos: 31 están en ventas, 54 en investigación, 42 en marketing, 20 en ingeniería, 47 en finanzas y 58 en producción. Se pierde el cheque del sueldo de un empleado. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en el departamento de investigación?

En los Ejercicios 53-60, los espacios muestrales son grandes y usted debe usar los principios de conteo que se estudian en la sección 9.6.

53. PREPARACIÓN PARA UN EXAMEN A un grupo de estudiantes se le da una lista de 20 problemas, 10 de los cuales serán parte de un próximo examen. Un estudiante sabe cómo resolver 15 de los problemas. Encuentre las probabilidades de que el estudiante pueda contestar (a) las 10 preguntas del examen, (b) exactamente ocho preguntas y (c) al menos nueve preguntas.

54. CONFUSIÓN EN NÓMINA Cinco cheques de sueldo y sobres están dirigidos a cinco personas. Los cheques de sueldo se insertan al azar en los sobres. ¿Cuáles son las probabilidades de que (a) exactamente un cheche se inserte en el sobre correcto y (b) al menos un cheque se inserte en el sobre correcto?

55. EXHIBICIÓN DE JUEGO En una exhibición de juego, a usted se le dan cinco dígitos para arreglar en el orden apropiado para formar el precio de un auto. Si está bien, gana el auto. ¿Cuál es la probabilidad de ganar, dadas las siguientes condiciones?

(a) Usted adivina la posición de cada dígito.

(b) Usted sabe el primer dígito y adivina las posiciones de los otros dígitos.

56. JUEGO DE NAIPES El mazo de un juego de naipes consta de 108. Veinticinco de cada uno son rojos, amarillos, azules y verdes y ocho son comodines. A cada jugador se le da una mano de siete cartas al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mano contenga exactamente dos comodines?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que una mano contenga dos comodines, dos cartas rojas y tres azules?

57. SACAR UN NAIPE Un naipe se selecciona al azar de un mazo ordinario de 52 cartas de juego. Encuentre las probabilidades de que el naipe sea (a) de número par, (b) de corazones o un diamante, y (c) un nueve o tenga figura.

58. MANO DE PÓQUER Se sacan cinco cartas de un mazo ordinario de 52 cartas de juego. ¿Cuál es la probabilidad de que la mano sacada sea un full? (Un full es una mano formada por dos cartas de una clase y tres de otra.)

59. UNIDADES DEFECTUOSAS Un envío de 12 hornos de microondas contiene tres unidades defectuosas. Una compañía vendedora ha ordenado cuatro de estas unidades y, como cada una está empacada de manera idéntica, la selección será aleatoria. ¿Cuáles son las probabilidades de que (a) las cuatro unidades estén bien, (b) exactamente dos unidades estén bien y (c) al menos dos unidades estén bien?

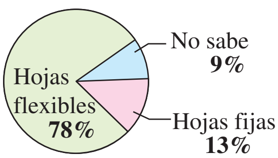
60. CÓDIGOS DE NIP Los números de identificación personal (NIP) en cajeros automáticos por lo general constan de sucesiones de números de 4 dígitos. Encuentre la probabilidad de que si usted olvida su NIP, pueda adivinar la secuencia correcta (a) al azar y (b) si puede recordar los primeros dos dígitos.

61. GENERADOR DE NÚMEROS ALEATORIOS Dos enteros del 1 al 40 son seleccionados por un generador de números al azar. ¿Cuáles son las probabilidades de que (a) los números sean pares, (b) un número sea par y uno sea impar, (c) ambos números sean menores a 30 y (d) el mismo número se escoja dos veces?

62. GENERADOR DE NÚMEROS ALEATORIOS Repita el Ejercicio 61 para un generador de números aleatorios que escoge dos enteros del 1 al 80.

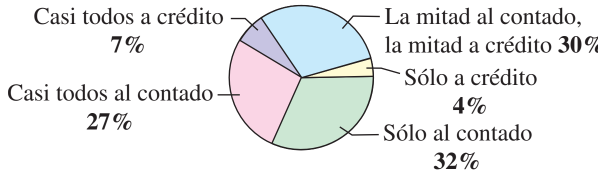
63. HORAS DE TRABAJO FLEXIBLES En una encuesta se preguntó a unas personas si preferirían trabajar horas flexibles, aun cuando esto significara un avance más lento en su carrera, para que pudieran pasar más tiempo con sus familias. Los resultados de la encuesta se muestran en la figura. Tres personas de la encuesta se escogieron al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas prefieran horas flexibles?

Horas de trabajo flexibles



64. CONCIENCIA DE CONSUMIDOR Suponga que los métodos empleados por compradores para pagar mercancías se muestran en la gráfica circular siguiente. Dos compradores son escogidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos paguen sus compras sólo al contado?

Forma en que compradores pagan su mercancía



65. SISTEMA DE RESPALDO Un vehículo espacial tiene un sistema independiente de respaldo para una de sus redes de comunicación. La probabilidad de que cualquiera de los sistemas funcione satisfactoriamente durante un vuelo es 0.985. ¿Cuáles son las probabilidades de que durante un vuelo (a) ambos sistemas funciones satisfactoriamente, (b) al menos un sistema funciona satisfactoriamente y (c) ambos sistemas fallen.

66. VEHÍCULO DE RESPALDO Una compañía de bomberos mantiene dos vehículos de rescate. Debido a la demanda de vehículos y a la probabilidad de fallas mecánicas, la probabilidad de que un vehículo esté disponible cuando es necesario es 90%. La disponibilidad de un vehículo es independiente de la disponibilidad de otro. Encuentre las probabilidades de que (a) ambos vehículos estén disponibles en un momento determinado, (b) ninguno de los vehículos esté disponible y (c) al menos un vehículo esté disponible.

67. RULETA La ruleta americana es un juego en el que una rueda gira en un eje y está dividida en 38 casillas. Treinta y seis de las casillas están numeradas del 1 al 36, de las cuales la mitad son rojas y la mitad son negras. Dos de las casillas son verdes y están numeradas 0 y 00 (vea figura). El operador de la ruleta hace girar la rueda y una pequeña pelota en direcciones opuestas. Cuando la pelotilla se detiene, tiene igual probabilidad de quedar en cualquiera de las casillas numeradas.

(a) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en la casilla 00.

(b) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en una casilla roja.

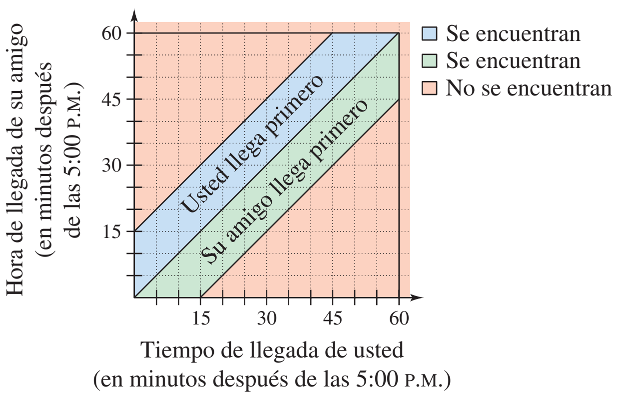
(c) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en una casilla verde o en una casilla negra.

(d) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en la casilla número 14 en dos giros consecutivos.

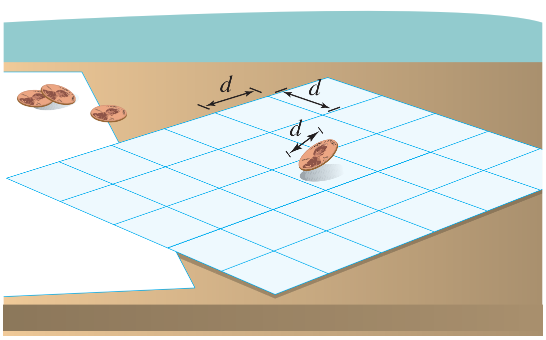
(e) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en una casilla roja en tres giros consecutivos.

68. ¿NIÑO O NIÑA? Suponga que la probabilidad del nacimiento de un niño de sexo particular es 50%. En una familia con cuatro hijos, ¿cuáles son las probabilidades de que (a) todos los hijos sean niños, (b) todos los hijos sean del mismo sexo y (c) haya al menos un niño.

69. GEOMETRÍA Usted y un amigo están de acuerdo en verse en su restaurante favorito de comida rápida entre las 5:00 y las 6:00 P.M. El que llegue primero esperará 15 minutos al otro, y luego dejará el lugar (vea figura). ¿Cuál es la probabilidad de que los dos se encuentren en realidad, suponiendo que sus horas de llegada sean aleatorias dentro de una hora?



70. ESTIMACIÓN DE π Una moneda de diámetro d se deja caer sobre un papel que contiene una cuadrícula de d unidades en un lado (vea figura).



(a) Encuentre la probabilidad de que la moneda cubra un vértice de uno de los cuadrados de la cuadrícula.

(b) Realice el experimento 100 veces y use los resultados para aproximar π.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 71 y 72, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

71. Si A y b son eventos independientes con probabilidades diferentes de cero, entonces A puede ocurrir cuando B ocurra.

72. Sacar un número menor a 3 en un dado normal de seis lados tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$. El complemento de este evento es sacar un número mayor a 3 y su probabilidad es $\frac{1}{2}$.

73. RECONOCIMIENTO DE PATRÓN Considere un grupo de n personas.

(a) Explique por qué el patrón siguiente da las probabilidades de que las n personas tengan distintos cumpleaños.

$$n = 2: \quad \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} = \frac{365 \cdot 364}{365^2}$$

$$n = 3: \quad \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3}$$

(b) Use el patrón del inciso (a) para escribir una expresión para la probabilidad de que $n = 4$ personas tengan distintos cumpleaños.

(c) Sea P_n la probabilidad de que las n personas tengan distintos cumpleaños. Verifique que esta probabilidad pueda obtenerse recursivamente con

$$P_1 = 1 \text{ y } P_n = \frac{365 - (n - 1)}{365} P_{n-1}.$$

(d) Explique por qué $Q_n = 1 - P_n$ da la probabilidad de que al menos dos personas de un grupo de n personas tengan el mismo cumpleaños.

(e) Use los resultados de los incisos (c) y (d) para completar la tabla.

n	10	15	20	23	30	40	50
P_n							
Q_n							

(f) ¿Cuántas personas deben estar en el grupo para que la probabilidad de que al menos dos de ellas tengan el mismo cumpleaños sea mayor a $\frac{1}{2}$? Explique.

74. TOQUE FINAL Escriba un breve párrafo que defina lo siguiente.

(a) Espacio muestral de un experimento

(b) Evento

(c) La probabilidad de un evento E en un espacio muestral S

(d) La probabilidad del complemento de E

75. PIÉNSELO Un pronóstico del clima indica que la probabilidad de lluvia es 40%. ¿Qué significa esto?

76. Lance dos monedas al aire 100 veces y anote el número de "caras" que ocurren en cada tiro (0, 1 o 2). ¿Cuántas veces hubo caras? ¿Cuántas veces esperaría usted que cayeran dos caras si usted realiza el experimento 1000 veces?