9.6 Principios de conteo

Lo que debe aprender

- Resolver problemas de conteo sencillos.
- Usar el principio fundamental de conteo para resolver problemas de conteo.
- Usar permutaciones para resolver problemas de conteo.
- Usar combinaciones para resolver problemas de conteo.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar principios de conteo para resolver problemas que se presentan en la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 78 de la página 698 se pide al lector usar principios de conteo para determinar el número de formas posibles de seleccionar los números ganadores en la lotería Powerball.

© Michael Simpson/Getty Images

Problemas de conteo sencillos

Esta sección y la sección 9.7 presentan una breve introducción a algunos de los principios básicos de conteo y sus aplicaciones a la probabilidad. En la sección 9.7 veremos que mucho de la probabilidad tiene que ver con contar el número de formas en las que puede ocurrir un evento. Los siguientes dos ejemplos describen problemas sencillos de conteo.

Ejemplo 1 Seleccionar pares de números al azar

Ocho pequeños trozos de papel se numeran del 1 al 8 y se ponen en una caja; uno de ellos se saca de la caja, se toma nota del mismo y se *reemplaza en la caja*. Entonces, se saca un segundo trozo de la caja y su número se anota. Por último, los dos números se suman. ¿De cuántas formas diferentes se puede tener una suma igual a 12?

Solución

Para resolver este problema, cuente las formas diferentes en que se puede obtener una suma de 12 usando dos números del 1 al 8.

Primer número	4	5	6	7	8
Segundo número	8	7	6	5	4

De esta lista, se puede ver que una suma de 12 puede presentarse en cinco formas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Ejemplo 2 Seleccionar pares de números al azar

Ocho trozos de papel se numeran del 1 al 8 y se colocan en una caja. Dos de ellos se sacan de la caja *al mismo tiempo* y los números que tienen marcados se anotan y se suman. ¿De cuántas formas diferentes puede obtenerse una suma igual a 12?

Solución

Para resolver este problema, cuente las formas diferentes en que se puede obtener una suma de 12 *usando dos números diferentes* del 1 al 8.

Primer número	4	5	7	8
Segundo número	8	7	5	4

Por tanto, una suma de 12 se puede obtener en cuatro formas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.

La diferencia entre los problemas de conteo en los ejemplos 1 y 2 se puede describir diciendo que la selección aleatoria en el Ejemplo 1 ocurre **con reemplazo**, en tanto que la selección aleatoria en el Ejemplo 2 ocurre **sin reemplazo**, lo cual elimina la posibilidad de escoger dos veces el 6.

El principio fundamental de conteo

Los ejemplos 1 y 2 describen problemas sencillos de conteo en los que se puede *hacer una lista* de cada forma posible en que puede presentarse un evento. Cuando se puede, ésta es siempre la mejor manera de resolver un problema de conteo. No obstante, algunos eventos pueden presentarse en tantas formas diferentes que no es factible escribir toda la lista. En tales casos debemos apoyarnos en fórmulas y principios de conteo; el más importante de éstos es el **principio fundamental de conteo.**

Principio fundamental de conteo

Sean E_1 y E_2 dos eventos. El primero E_1 puede presentarse en m_1 formas. Después que E_1 ha ocurrido, E_2 puede ocurrir en m_2 formas. El número de formas en que los dos eventos pueden ocurrir es $m_1 \cdot m_2$.

El principio fundamental de conteo puede extenderse a tres o más eventos. Por ejemplo, el número de formas en que tres eventos E_1, E_2 y E_3 pueden ocurrir es $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$.

Ejemplo 3 Usar el principio fundamental de conteo

¿Cuántos pares diferentes de letras del alfabeto inglés son posibles?

Solución

Hay dos eventos en esta situación. El primero de ellos es la opción de la primera letra, y el segundo evento es la opción de la segunda letra. Como el alfabeto inglés contiene 26 letras, se deduce que el número de pares de dos letras es

$$26 \cdot 26 = 676.$$

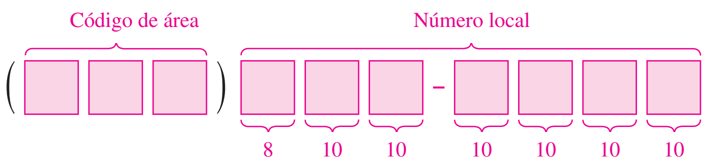
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Ejemplo 4 Usar el principio fundamental de conteo

Los números telefónicos en Estados Unidos actualmente tienen 10 dígitos. Los primeros tres son la *clave de área* (LADA) y los 7 siguientes son el *número telefónico local*. ¿Cuántos números telefónicos diferentes son posibles dentro de cada clave de área? (Observe que en la actualidad, un número telefónico local no puede iniciarse con 0 ni 1.)

Solución

Como el primer dígito de un número telefónico local no puede ser 0 ni 1, hay sólo ocho opciones para el primer dígito. Para cada uno de los otros seis dígitos, hay 10 opciones.



Por tanto, el número de números telefónicos locales que son posibles dentro de cada código de área es

$$8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 8\,000\,000.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Permutaciones

Una aplicación importante del principio fundamental de conteo es determinar el número de formas en que n elementos se pueden arreglar (en orden). Un ordenamiento de n elementos se denomina **permutación** de los elementos.

Definición de permutación

Una **permutación** de n elementos es un ordenamiento de los elementos tal que un elemento es primero, uno es segundo, uno es tercero, etcétera.

Ejemplo 5 Hallar el número de permutaciones de n elementos

¿Cuántas permutaciones son posibles para las letras A, B, C, D, E y F?

Solución

Considere el siguiente razonamiento.

Primera posición: cualquiera de las *seis letras*

Segunda posición: cualquier de las restantes *cinco* letras

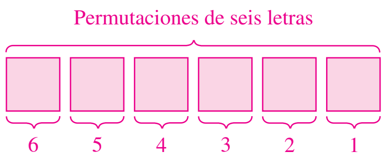
Tercera posición: cualquiera de las restantes *cuatro* letras

Cuarta posición: cualquiera de las restantes *tres* letras

Quinta posición: cualquiera de las restantes *dos* letras

Sexta posición: la *única* letra restante

Entonces, el números de opciones para las seis posiciones son como sigue.



El número total de permutaciones de las seis letras es

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 720. \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Número de permutaciones de n elementos

El número de permutaciones de n elementos es

$$n \cdot (n-1) \cdot \cdot \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

En otras palabras, hay $n!$ formas en que n elementos pueden ordenarse.

Vaughn Youtz/Newsmakers/Getty Images

Once caballos pura sangre de carreras ostentan el título de ganador de la Triple Corona por vencer en el Derby de Kentucky, el Preakness y el Belmont Stakes en el mismo año. Cuarenta y nueve caballos han ganado dos de las tres carreras.

Ejemplo 6 Contar finales de carreras de caballos

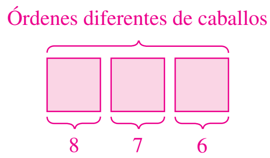
Ocho caballos están corriendo en una carrera. ¿De cuántas formas pueden estos caballos llegar primero, segundo y tercero? (Suponga que no hay empates.)

Solución

He aquí las diferentes posibilidades.

Ganador (primera posición): *ocho* opciones
Lugar (segunda posición): *siete* opciones
Exhibición (tercera posición): *seis* opciones

Usando el principio fundamental de conteo, multiplique entre sí estos tres números para obtener lo siguiente.



Entonces, hay $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas diferentes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Es útil, a veces, ordenar un *subconjunto* de un conjunto de elementos más que de todo un conjunto. Por ejemplo, podríamos desear escoger y ordenar r elementos de un conjunto de n elementos. Este ordenamiento se denomina **permutación de n elementos tomados r a la vez.**

Permutaciones de n elementos tomados r a la vez

El número de permutaciones de n elementos tomados r a la vez es

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= n(n-1)(n-2)\cdot\cdot\cdot(n-r+1). \end{aligned}$$

TECNOLOGIA

Casi todas las calculadoras de gráficas están programadas para evaluar ${}_nP_r$. Consulte la guía del usuario de su calculadora y luego evalúe ${}_8P_5$. Debe obtener una respuesta de 6720.

Usando esta fórmula, se puede trabajar otra vez el Ejemplo 6 para hallar que el número de permutaciones de ocho caballos tomados tres a la vez es

$$\begin{aligned} {}_8P_3 &= \frac{8!}{(8-3)!} \\ &= \frac{8!}{5!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} \\ &= 336 \end{aligned}$$

que es la misma respuesta obtenida en el ejemplo.

Recuerde que para permutaciones, el orden es importante. Por tanto, si usted está viendo las posibles permutaciones de las letras A, B, C y D tomadas tres a la vez, las permutaciones (A, B, C) y (B, A, D) se cuentan como diferentes porque el orden de los elementos es distinto.

Suponga, no obstante, que se le pide hallar las posibles permutaciones de las letras A, A, B y C. El número total de permutaciones de las cuatro letras sería ${}_4P_4 = 4!$. Sin embargo, no todos estos arreglos u ordenamientos serían diferentes porque hay dos letras A en la lista. Para hallar el número de permutaciones diferentes se puede usar la siguiente fórmula.

Permutaciones diferentes

Suponga que un conjunto de n objetos tiene n_1 de una clase de objeto, n_2 de una segunda clase, n_3 de una tercera clase, y así sucesivamente, con

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdot \cdot \cdot + n_k.$$

Entonces el número de **permutaciones diferentes** de los n objetos es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot n_k!}.$$

Ejemplo 7 Permutaciones diferentes

¿En cuántas formas diferentes se pueden escribir las letras BANANA?

Solución

Esta palabra tiene seis letras, de las cuales tres son A, dos son N y una es B. Por tanto, el número de formas diferentes en que las letras se pueden escribir es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!}$$

$$= 60.$$

Las 60 permutaciones diferentes son como sigue.

AAABNN	AAANBN	AAANNB	AABANN	AABNAN	AABNNA
AANABN	AANANB	AANBAN	AANBNA	AANNAB	AANNBA
ABAANN	ABANAN	ABANNA	ABNAAN	ABNANA	ABNNAA
ANAABN	ANAANB	ANABAN	ANABNA	ANANAB	ANANBA
ANBAAN	ANBANA	ANBNAA	ANNAAB	ANNABA	ANNBAA
BAAANN	BAANAN	BAANNA	BANAAN	BANANA	BANNAA
BNAAAN	BNAANA	BNANAA	BNNAAA	NAAABN	NAAANB
NAABAN	NAABNA	NAANAB	NAANBA	NABAAN	NABANA
NABNAA	NANAAB	NANABA	NANBAA	NBAAAN	NBAANA
NBANAA	NBNAAA	NNAAAB	NNAABA	NNABAA	NNBAAA

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Combinaciones

Cuando se cuenta el número de posibles permutaciones de un conjunto de elementos, el orden es importante. Como tema final de esta sección veremos un método de seleccionar subconjuntos de un conjunto más grande en el que el orden *no es* importante. Estos subconjuntos se llaman **combinaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez.** Por ejemplo, las combinaciones

$\{A, B, C\}$ y $\{B, A, C\}$

son equivalentes porque ambos conjuntos contienen los mismos tres elementos, y el orden en el que están escritos no es importante. Por tanto, se contaría sólo uno de los dos conjuntos. Un ejemplo común de cómo se presenta una combinación es en un juego de naipes en el que el jugador es libre de reordenar los naipes después de haber sido repartidos.

Ejemplo 8 Combinaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez

¿De cuántas formas se pueden escoger tres letras del conjunto A, B, C, D y E? (El orden de las tres letras no es importante.)

Solución

Los siguientes subconjuntos representan las diferentes combinaciones de tres letras que se pueden escoger de las cinco letras.

$\{A, B, C\}$ $\{A, B, D\}$
$\{A, B, E\}$ $\{A, C, D\}$
$\{A, C, E\}$ $\{A, D, E\}$
$\{B, C, D\}$ $\{B, C, E\}$
$\{B, D, E\}$ $\{C, D, E\}$

De esta lista, se puede concluir que hay 10 formas en que tres letras se pueden escoger de entre cinco letras.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Combinaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez

El número de combinaciones de n elementos tomados r a la vez es

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

que es equivalente a $_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$.

Observe que la fórmula para $_nC_r$ es la misma dada para coeficientes binomiales. Para ver cómo se usa esta fórmula, resuelva el problema de conteo del Ejemplo 8. En ese problema, se nos pidió hallar el número de combinaciones de cinco elementos tomados tres a la vez. Entonces, $n = 5$, $r = 3$, y el número de combinaciones es

$$_5C_3 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 10$$

que es la misma respuesta obtenida en el Ejemplo 8.

A ♥	A ♦	A ♣	A ♠
2 ♥	2 ♦	2 ♣	2 ♠
3 ♥	3 ♦	3 ♣	3 ♠
4 ♥	4 ♦	4 ♣	4 ♠
5 ♥	5 ♦	5 ♣	5 ♠
6 ♥	6 ♦	6 ♣	6 ♠
7 ♥	7 ♦	7 ♣	7 ♠
8 ♥	8 ♦	8 ♣	8 ♠
9 ♥	9 ♦	9 ♣	9 ♠
10 ♥	10 ♦	10 ♣	10 ♠
J ♥	J ♦	J ♣	J ♠
Q ♥	Q ♦	Q ♣	Q ♠
K ♥	K ♦	K ♣	K ♠

Mazo normal de naipes
FIGURA 9.7

Ejemplo 9 Conteo de "manos" de naipes

Una "mano" normal de póquer está formada por cinco cartas repartidas de un mazo de 52 (vea Figura 9.7). ¿Cuántas "manos" de póquer son posibles? (Después de repartir los naipes, el jugador puede reordenarlos, por lo cual el orden no es importante.)

Solución

Se puede hallar el número de manos de póquer si se usa la fórmula para el número de combinaciones de 52 elementos tomados cinco a la vez, como sigue.

$$
\begin{aligned}
{}_{52}C_5 &= \frac{52!}{(52-5)!5!} \\
&= \frac{52!}{47!5!} \\
&= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \cancel{47!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{47!}} \\
&= 2\,598\,960
\end{aligned}
$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

Ejemplo 10 Formación de un equipo

Usted está formando un equipo de natación de 12 miembros de 10 muchachas y 15 muchachos. El equipo debe estar formado por cinco muchachas y siete muchachos. ¿Cuántos equipos de 12 miembros son posibles?

Solución

Hay ${}_{10}C_5$ formas de escoger cinco muchachas. Hay ${}_{15}C_7$ formas de escoger siete muchachos. Por el principio fundamental de conteo, hay ${}_{10}C_5 \cdot {}_{15}C_7$ formas de escoger cinco muchachas y siete muchachos.

$$
\begin{aligned}
{}_{10}C_5 \cdot {}_{15}C_7 &= \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{15!}{8! \cdot 7!} \\
&= 252 \cdot 6435 \\
&= 1\,621\,620
\end{aligned}
$$

Por tanto, hay 1 621 620 posibles equipos de natación de 12 miembros.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

Cuando resuelva problemas en los que intervengan principios de conteo, necesita tener aptitud de distinguir entre los diversos principios que hemos visto para determinar cuál necesita para obtener el resultado correcto. Para hacer esto, hágase las siguientes preguntas.

1. ¿Es importante el orden de los elementos? *Permutación*
2. ¿Los elementos escogidos son un subconjunto de un conjunto más grande en el que no sea importante el orden? *Combinación*
3. ¿El problema implica dos o más eventos separados? *Principio fundamental de conteo.*

9.6 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El _______ _______ _______ _______ dice que si hay m_1 formas en que un evento ocurra y m_2 formas para que ocurra un segundo evento, hay $m_1 \cdot m_2$ formas para que ambos eventos ocurran.
2. Un ordenamiento de n elementos recibe el nombre de ______ de los elementos.
3. El número de permutaciones de n elementos tomados r a la vez está dado por la fórmula ________.
4. El número de _____ _______ de n objetos está dado por $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3! \cdot \cdot \cdot n_k!}$.
5. Cuando seleccionamos subconjuntos de un conjunto más grande en el que el orden no es importante, estamos buscando el número de ________ de n elementos tomados r a la vez.
6. El número de combinaciones de n elementos tomados r a la vez está dado por la fórmula ________.

HABILIDADES Y APLICACIONES

SELECCIÓN AL AZAR En los Ejercicios 7-14, determine el número de formas en que una computadora puede generar al azar uno o más de enteros del 1 al 12.

7. Un entero impar
8. Un entero par
9. Un entero primo
10. Un entero mayor a 9
11. Un entero divisible entre 4
12. Un entero divisible entre 3
13. Dos enteros *distintos* cuya suma es 9
14. Dos enteros *distintos* cuya suma es 8

15. **SISTEMAS DE ENTRETENIMIENTO** Un cliente puede escoger uno de tres amplificadores, uno de dos reproductores de discos compactos y uno de cinco modelos de altavoz para un sistema de entretenimiento. Determine el número de posibles configuraciones del sistema.
16. **SOLICITANTES DE TRABAJO** Un colegio necesita dos miembros más para su facultad: un químico y un experto en estadística. ¿En cuántas formas pueden ocuparse estas posiciones si hay cinco solicitantes para la posición de químico y tres para la de estadística?
17. **PROGRAMA DE CURSO** Un estudiante universitario está preparando un programa de curso para el siguiente semestre. El estudiante puede seleccionar uno de dos cursos de matemáticas, uno de tres cursos de ciencias y uno de cinco cursos de ciencias sociales y humanidades. ¿Cuántos programas son posibles?
18. **ABORDAR UN AVIÓN** Ocho personas están abordando un avión. Dos tienen boletos de primera clase y abordan antes que los de clase económica. ¿En cuántas formas pueden abordar el avión las ocho personas?
19. **EXAMEN DE VERDADERO-FALSO** ¿En cuántas formas puede ser contestado un examen de seis preguntas de verdadero-falso? (Suponga que no se omiten preguntas.)
20. **EXAMEN DE VERDADERO-FALSO** ¿En cuántas formas puede ser contestado un examen de doce preguntas de verdadero-falso? (Suponga que no se omiten preguntas.)
21. **NÚMEROS DE PLACA PARA AUTOMÓVIL** En el estado de Pennsylvania, cada uno de los números de placa estándar para automóvil consta de tres letras seguidas por un número de cuatro dígitos. ¿Cuántos números de placa para automóvil pueden formarse en Pennsylvania?
22. **NÚMEROS DE PLACA PARA AUTOMÓVIL** En cierto estado, cada número de placa para automóvil consta de dos letras seguidas de un número de cuatro dígitos. Para evitar confusión entre "O" y "cero" y entre "I" y "uno", las letras "O" e "I" no se usan. ¿Cuántos números de placas pueden formarse en este estado?
23. **NÚMEROS DE TRES DÍGITOS** ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse bajo cada una de las condiciones siguientes?
    (a) El dígito inicial no puede ser cero.
    (b) El dígito inicial no puede ser cero y no se permite repetición de dígitos.
    (c) El dígito inicial no puede ser cero y el número debe ser un múltiplo de 5.
    (d) El número es al menos 400.
24. **NÚMEROS DE CUATRO DÍGITOS** ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse bajo cada una de las condiciones siguientes?
    (a) El dígito inicial no puede ser cero.
    (b) El dígito inicial no puede ser cero y no se permite repetición de dígitos.
    (c) El dígito inicial no puede ser cero y el número debe ser menor a 500.
    (d) El dígito inicial no puede ser cero y el número debe ser par.
25. **CERRADURA DE COMBINACIÓN** Una cerradura de combinación se abrirá cuando se seleccione la opción correcta de tres números (del 1 al 40, inclusive). ¿Cuántas combinaciones diferentes de la cerradura son posibles?

26. CERRADURA DE COMBINACIÓN Una cerradura de combinación se abrirá cuando se seleccione la opción correcta de tres números (del 1 al 50, inclusive). ¿Cuántas combinaciones de la cerradura son posibles?

27. ASIENTOS PARA CONCIERTO Cuatro parejas han reservado asientos en una fila para un concierto. ¿En cuántas formas pueden tomar asiento si

(a) no hay restricciones para hacerlo?

(b) los dos de cada pareja desean sentarse juntos?

28. UNA FILA ¿En cuántos órdenes pueden caminar cuatro muchachas y cuatro muchachos por una puerta de ancho para una sola persona si

(a) no hay restricciones?

(b) las muchachas pasan antes que los muchachos?

En los Ejercicios 29-34, evalúe $_nP_r$.

29. $_4P_4$ **30.** $_5P_5$

31. $_8P_3$ **32.** $_{20}P_2$

33. $_5P_4$ **34.** $_7P_4$

En los Ejercicios 35-38, evalúe $_nP_r$ con una calculadora de gráficas.

35. $_{20}P_5$ **36.** $_{100}P_5$

37. $_{100}P_3$ **38.** $_{10}P_8$

39. POSAR PARA UNA FOTOGRAFÍA ¿En cuántas formas pueden alinearse cinco niños en una fila para una fotografía?

40. VIAJAR EN AUTO ¿En cuántas formas pueden tomar asiento seis personas en un auto de seis pasajeros?

41. ESCOGER OFICIALES De entre un grupo de 12 candidatos, se han de ocupar las oficinas del presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. ¿En cuántas formas pueden ser ocupadas las oficinas?

42. PRODUCCIÓN DE UNA LÍNEA DE ENSAMBLE Hay cuatro procesos implicados en el ensamble de un producto, y estos procesos pueden realizarse en cualquier orden. La dirección desea probar cada orden para determinar cuál es el que consume menos tiempo. ¿Cuántos órdenes tendrán que probarse?

En los Ejercicios 43-46, encuentre el número de permutaciones diferentes del grupo de letras.

43. A, A, G, E, E, E, M **44.** B, B, B, T, T, T, T, T

45. A, L, G, E, B, R, A **46.** M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I

47. Escriba todas las permutaciones de las letras A, B, C y D.

48. Escriba todas las permutaciones de las letras A, B, C y D si las letras B y C deben permanecer entre las letras A y D.

49. ORDEN DE BATEO Un *coach* (director técnico) de béisbol está creando un orden al bate de nueve jugadores, seleccionándolos de entre un equipo de 15 jugadores. ¿Cuántos órdenes al bate son posibles?

50. ATLETISMO Ocho velocistas han calificado para las finales en la carrera de 100 metros planos en el torneo nacional de pista de la NCAA. ¿En cuántas formas pueden llegar los velocistas en primero, segundo y tercer lugar? (Suponga que no hay empates.)

En los Ejercicios 51-56, evalúe $_nC_r$ usando la fórmula de esta sección.

51. $_5C_2$ **52.** $_6C_3$

53. $_4C_1$ **54.** $_5C_1$

55. $_{25}C_0$ **56.** $_{20}C_0$

En los Ejercicios 57-60, evalúe $_nC_r$ con una calculadora de gráficas.

57. $_{20}C_4$ **58.** $_{10}C_7$

59. $_{42}C_5$ **60.** $_{50}C_6$

61. Escriba todas las selecciones posibles de dos letras que pueden formarse de las letras A, B, C, D, E y F. (El orden de las dos letras no es importante.)

62. FORMACIÓN DE UN GRUPO EXPERIMENTAL Para realizar un experimento, cinco estudiantes son seleccionados al azar de entre un grupo de 20. ¿Cuántos grupos diferentes de cinco estudiantes son posibles?

63. SELECCIÓN DE JURADO De entre un grupo de 40 personas, ha de seleccionarse un jurado de 12 personas. ¿En cuántas formas puede ser seleccionado el jurado?

64. MIEMBROS DE UN COMITÉ Un comité del senado de Estados Unidos tiene 14 miembros. Suponiendo que la afiliación de partido no fue factor en la selección, ¿cuántos comités fueron posibles de entre los 100 senadores de Estados Unidos?

65. OPCIONES DE LOTERÍA En el juego de Massachusetts Mass Cash, un jugador escoge cinco números del 1 al 35. ¿En cuántas formas puede seleccionar los cinco números un jugador?

66. OPCIONES DE LOTERÍA En el juego de lotería de Luisiana, un jugador escoge seis números del 1 al 40. ¿En cuántas formas puede el jugador seleccionar los seis números?

67. UNIDADES DEFECTUOSAS Un envío de 25 televisores contiene tres unidades defectuosas. ¿En cuántas formas puede una compañía vendedora comprar cuatro de estas unidades y recibir (a) todas las unidades en buen estado, (b) dos unidades buenas y (c) al menos dos unidades buenas?

68. RELACIONES INTERPERSONALES La complejidad de las relaciones interpersonales crece de modo considerable cuando el tamaño del grupo es mayor. Determine el número de relaciones de dos parejas en grupos de (a) 3, (b) 8, (c) 12 y (c) 20 personas.

69. MANO DE PÓQUER Usted reparte cinco naipes de un mazo ordinario de 52 naipes o cartas de juego. ¿En cuántas formas puede usted obtener (a) un full y (b) una combinación de cinco cartas que contiene dos sotas y tres ases? (Un full consta de tres cartas de una clase y dos de otra. Por ejemplo, A-A-A-5-5 y K-K-K-10-10 son full.)

70. SOLICITANTES DE TRABAJO Un fabricante de ropa entrevista a 12 personas para cuatro puestos de trabajo en el departamento de recursos humanos de la compañía. Cinco de las 12 personas son mujeres. Si las 12 personas están calificadas, ¿en cuántas formas puede el empleador llenar los cuatro puestos de trabajo si (a) la selección es al azar y (b) exactamente dos mujeres son seleccionadas?

71. FORMACIÓN DE UN COMITÉ Un comité de investigación de seis personas en un colegio local se ha de formar con un administrador, tres miembros de facultad y dos estudiantes. Hay siete administradores, 12 miembros de facultad y 20 estudiantes compitiendo para el comité. ¿Cuántos comités de seis miembros son posibles?

72. APLICACIÓN DE LA LEY Un departamento de policía usa imágenes de computadora para crear fotografías digitales de presuntos delincuentes, a partir de descripciones de testigos. Un paquete de software contiene 195 líneas de pelo, 99 juegos de ojos y cejas, 89 narices, 105 bocas y 74 estructuras de la barbilla y mejillas.

(a) Encuentre el posible número de rostros que el software pueda crear.

(b) Un testigo puede claramente recordar la línea de pelo y ojos y cejas de un sospechoso. ¿Cuántos rostros pueden ser reproducidos con esta información?

GEOMETRÍA En los Ejercicios 73-76, encuentre el número de diagonales del polígono. (Un segmento de recta que enlaza cualesquier dos vértices no adyacentes se llama *diagonal* del polígono.)

73. Pentágono

74. Hexágono

75. Octágono

76. Decágono (10 lados)

77. GEOMETRÍA Tres puntos que no son colineales determinan tres rectas. ¿Cuántas rectas están determinadas por nueve puntos, donde no hay tres que sean colineales?

78. LOTERÍA El Powerball es un juego de lotería que es operado por la Multi-State Lottery Association y se juega en 30 estados, Washington, D.C. y las Islas Vírgenes de Estados Unidos. El juego se practica sacando cinco bolas blancas de un tambor de 59 de ellas (numeradas del 1 al 59) y una bola roja de un tambor de 39 de éstas (numeradas del 1 al 39). El premio mayor se gana al igualar las cinco bolas blancas en cualquier orden con la bola roja.

(a) Encuentre la posible cantidad de números ganadores de Powerball.

(b) Encuentre la posible cantidad de números ganadores de Powerball si el premio es ganado al igualar las cinco bolas blancas en orden y la bola roja.

(c) Compare los resultados del inciso (a) con una lotería del estado en la que el premio es ganado al igualar seis bolas de un tambor de 59 bolas.

En los Ejercicios 79-86, despeje *n*.

79. $14 \cdot {}_nP_3 = {}_{n+2}P_4$

80. ${}_nP_5 = 18 \cdot {}_{n-2}P_4$

81. ${}_nP_4 = 10 \cdot {}_{n-1}P_3$

82. ${}_nP_6 = 12 \cdot {}_{n-1}P_5$

83. ${}_{n+1}P_3 = 4 \cdot {}_nP_2$

84. ${}_{n+2}P_3 = 6 \cdot {}_{n+2}P_1$

85. $4 \cdot {}_{n+1}P_2 = {}_{n+2}P_3$

86. $5 \cdot {}_{n-1}P_1 = {}_nP_2$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 87 y 88, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

87. El número de pares de letras que se pueden formar en cualquier orden de entre dos cualesquiera de las primeras 13 letras del alfabeto (A-M) es un ejemplo de una permutación.

88. El número de permutaciones de n elementos puede determinarse usando el principio fundamental de conteo.

89. ¿Cuál es la relación entre ${}_nC_r$ y ${}_nC_{n-r}$?

90. Sin calcular los números, determine cuál de lo siguiente es mayor. Explique.

(a) El número de combinaciones de 10 elementos tomados seis a la vez.

(b) El número de permutaciones de 10 elementos tomados seis a la vez.

DEMOSTRACION En los Ejercicios 91-94 demuestre la identidad.

91. ${}_nP_{n-1} = {}_nP_n$

92. ${}_nC_n = {}_nC_0$

93. ${}_nC_{n-1} = {}_nC_1$

94. ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!}$

95. PIÉNSELO ¿Su calculadora puede evaluar ${}_{100}P_{80}$? Si no es así, explique por qué.

96. TOQUE FINAL Decida si cada situación debe contarse usando permutaciones o combinaciones. Explique su razonamiento. (No calcule.)

(a) Número de formas en que 10 personas pueden estar en fila de espera para adquirir boletos para un concierto.

(b) Número de arreglos de tres tipos de flores de entre un arreglo de 20 tipos.

(c) Número de NIP de cuatro dígitos de una tarjeta de débito.

(d) Número de helados de dos copos creados de 31 sabores.

97. ESCRITURA Explique verbalmente el significado de ${}_nP_r$.